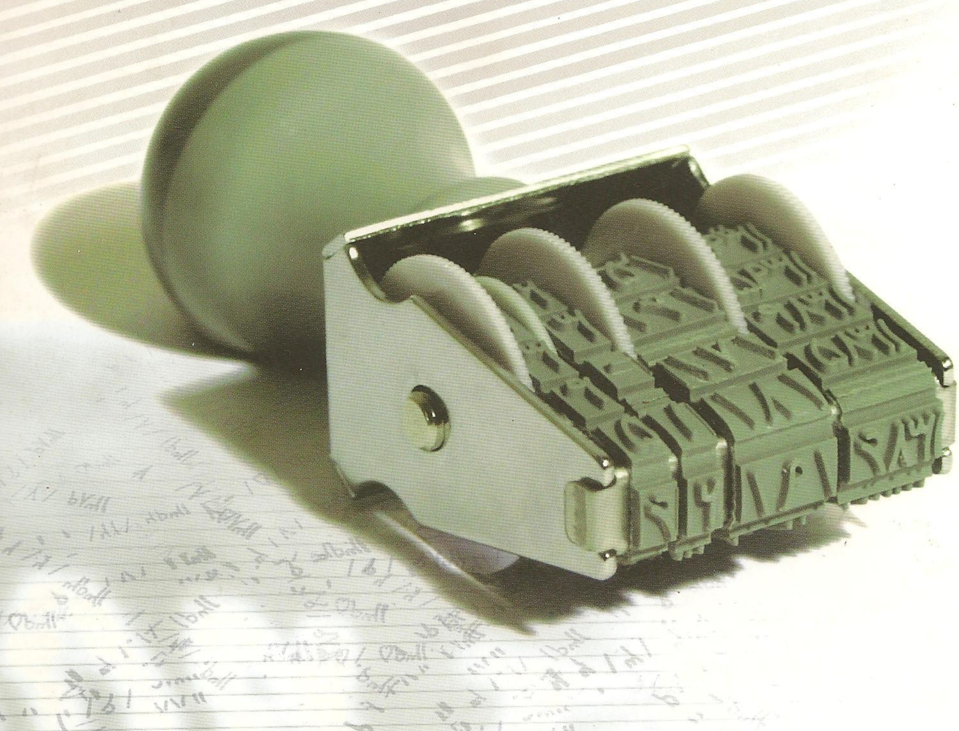
نشر الگو

آنالیز ترکیبی

المپیاد الگو



هیات علمی مجتمع
آموزشی انرژی اتمی

علیرضا علی پور

آموزش کامل

آنالیز ترکیبی

قابل استفاده دانش آموزان

داوطلبان کنکور دانشگاهها والمپیاد

تالیف:

علیرضا علی‌پور

سرشناسه : علی‌پور، علی‌رضا، ۱۳۵٤-
عنوان و پدیدآور : آنالیز ترکیبی - ترکیبیات: قابل استفاده برای دانش‌آموزان و داوطلبان کنکور دانشگاه‌ها و المپیاد/ مؤلف علی‌رضا علی‌پور
مشخصات نشر : تهران، مؤسسه الگوی توسعه‌ی نمونه، ۱۳۸٦
مشخصات ظاهری : ۳۲۸ص: جدول
شابک : ۵۲۰۰۰ریال: ٤-٤٠-۸۷۲٦-۹٦٤-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا
موضوع : دانشگاه‌ها و مدارس عالی-- ایران-- آزمون‌ها.
موضوع : ریاضیات ترکیبی-- آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه).
موضوع : ریاضیات ترکیبی --راهنمای آموزشی (متوسطه).
رده‌بندی کنگره : LB۲۳۵۳/ع۷٦۷ت٤
رده‌بندی دیویی : ۳۷۸/۱٦٦٤
شماره کتابخانه ملی : ۱۰۲۸٦۲۹

آنالیز ترکیبی - ترکیبیات

مؤلف: علیرضا علی‌پور
مدیریت تألیف: محمد حسین متولی
ناشر: مؤسسه‌ی الگوی توسعه‌ی نمونه
حروفچینی : مؤسسه‌ی الگوی توسعه‌ی نمونه
نوبت چاپ : هفتم (۱۳۹۰)
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۵۲۰۰ تومان
شابک : ۴-۴۰-۸۷۲۶-۹۶۴

www.olgoopub.com

آدرس انتشارات: تهران، خیابان فاطمی، خیابان چهارم، کوچه رامین، پلاک ۱۰
تلفن: ۸۸۹۹۳۰۳۰ (۱۰ خط)

فهرست

مقدمه

فصل ۱. اصول شمارش ۱

۱—۱ اصل ضرب ۱

۱—۲ اصل جمع ۱۳

۱—۳ اصل متمم ۲۱

فصل ۲. جایگشت‌ها ۲۶

۲—۱ فاکتوریل ۲۶

۲—۲ جایگشت‌های خطی ۲۹

۲—۳ جایگشت‌های r شیء از n شیء ۳۵

۲—۴ جایگشت‌های دوری ۴۱

فصل ۳. ترکیب‌ها و بسط دوجمله‌ای ۴۷

۳—۱ ترکیب‌ها ۴۷

۳—۲ بسط دوجمله‌ای ۶۳

فصل ۴. جایگشت‌های باتکرار ۷۱

۴—۱ جایگشت‌های باتکرار ۷۱

۴—۲ مسألهٔ مسیر ۸۸

۴—۳ بسط چندجمله‌ای ۹۷

فصل ۵. ترکیب‌های باتکرار ۱۰۲

۵–۱ معادلات با ضرایب واحد ۱۰۲

۵–۲ ترکیب‌های باتکرار ۱۰۸

۵–۳ توزیع اشیاء یکسان در دسته‌های متمایز ۱۱۵

فصل ٦. اصل شمول و عدم شمول ۱۱۸

٦–۱ حالت $n = ۲$ ۱۱۸

٦–۲ حالت $n = ۳$ ۱۲۸

فصل ۷. اصل لانه‌کبوتری ۱۴۲

۷–۱ صورت سادهٔ اصل لانه‌کبوتری ۱۴۲

۷–۲ صورت تعمیم یافتهٔ اصل لانه‌کبوتری ۱۵۸

فصل ۸. استقرای ریاضی ۱۷۱

۸–۱ استقرای ضعیف ۱۷۱

۸–۲ انواع دیگری از استقرای ریاضی ۱۸۳

فصل ۹. پاسخ، راهنمایی و راه حل ۱۹۲

کتاب‌نامه

مقدمه

سال سوم دبیرستان بودم. یکی از مباحث کتاب ریاضیات جدید در آن سال آنالیز ترکیبی بود. مقدمات آنالیز ترکیبی را از کتاب درسی یاد گرفتم و احساس کردم که به این موضوع خیلی علاقمندم. بعد از مدتی یکی از دوستانم کتاب ریاضیات انتخاب را به من معرفی کرد. من هم این کتاب را تهیه و در عرض ۱۰ روز کل کتاب را مطالعه کردم. در سال چهارم نیز معلم درس ریاضیات جدید کتابی به نام Concrete Mathematics را به من داد. دو فصل از این کتاب را خواندم و با مسأله‌های معروفی چون مسألهٔ برج هانوی، مسألهٔ ژزفوس، اعداد کاتالان و خیلی مسأله‌های دیگر آشنا شدم. علاوه بر این‌ها با مطالعهٔ یکی دو کتاب دیگر مقدماتی از نظریهٔ گراف را نیز یاد گرفتم. مطالعهٔ این کتاب‌ها از یک سو برایم لذت‌بخش بود و از سوی دیگر عطش یادگیری مفاهیم پیشرفته‌تر را در من بیشتر می‌کرد. همین عطش باعث شد که برای ورود به دانشگاه رشتهٔ ریاضی را انتخاب کنم. در دوران تحصیل در دانشگاه درس‌های زیادی را در زمینه‌های آنالیز ترکیبی و نظریهٔ گراف گذراندم و کتاب‌ها و مقالات بسیاری را در این دو زمینه مطالعه کردم. چون علاقهٔ زیادی به تدریس داشتم از همان زمان ورود به دانشگاه مشغول به تدریس شدم. غالب کلاس‌هایی که تا کنون داشته‌ام مربوط به درس آنالیز ترکیبی بوده‌اند. مطالعهٔ کتب مرجع و تدریس در دبیرستان باعث شد تا پس از مدتی یک مجموعهٔ نسبتاً بزرگی از مفاهیم و مسأله‌های آنالیز ترکیبی را جمع‌آوری کنم. خیلی دوست داشتم که این مجموعه را به یک کتاب تبدیل کنم. در سال ۱۳۷۹ از سوی انتشارات فاطمی پیشنهاد شد که یک کتاب ترکیبیات در زمینهٔ المپیاد بنویسم. پس از تألیف این کتاب تصمیم گرفتم که کتابی مقدماتی بنویسم که قابل استفادهٔ قشر وسیع‌تری از دانش‌آموزان باشد. برای همین منظور قرار شد که دو کتاب موضوعی، یکی در زمینهٔ نظریهٔ گراف و دیگری در زمینهٔ آنالیز ترکیبی را برای انتشارات فاطمی بنویسم. کتاب نظریهٔ گراف را

نوشتم و برای کتاب آنالیز ترکیبی یک مجموعهٔ بزرگی از مسائل را فراهم کردم ولی پس از آن فرصتی برای نوشتن متن کتاب میسر نشد. در دو سه سال اخیر در کلاس‌هایی که مربوط به درس آنالیز ترکیبی بوده‌اند از این مجموعه مسائل خیلی استفاده کرده‌ام. این امر باعث شد تا بتوانم اصلاحات خوبی را روی این مجموعه اعمال کنم. سال گذشته فرصتی فراهم شد و متن کتاب را نیز نوشتم و حاصل کار آن شد که اکنون ملاحظه می‌کنید.

این کتاب در ۸ فصل تنظیم شده‌است. شش فصل اول مربوط به مقدمات شمارش هستند و فصل‌های هفتم و هشتم کتاب به اصل لانه کبوتری و استقرای ریاضی اختصاص یافته است. هر فصل از چند بخش تشکیل شده است. در هر بخش علاوه بر توضیح درس تعداد قابل ملاحظه‌ای مسألهٔ حل‌شده وجود دارد. در پایان هر بخش نیز تعدادی مسأله آورده شده است که برخی از آن‌ها مشابه مسأله‌های حل‌شده در متن هستند و حل آن‌ها برای تسلط بر موضوع بسیار مفید است. برخی از مسأله‌ها نیز که مشکل‌ترند با علامت ستاره مشخص شده‌اند. در پایان کتاب برای مسائل ساده و مسائلی که مشابه مسأله‌های حل‌شده در متن کتاب هستند پاسخ و برای بقیهٔ مسائل راه‌حل داده شده است. امیدوارم که هر دانش‌آموز بتواند در حد توان از مطالب این کتاب استفاده کند و از مطالعه و حل مسائل آن لذت ببرد و بر دانش خود بیافزاید.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از کلیهٔ عزیزانی که مرا در تهیهٔ این کتاب یاری کردند بالاخص از دوست و یار همیشگی، نصیر کریمی عزیز که زحمت حروف‌چینی و صفحه‌آرایی کتاب به عهدهٔ ایشان بود و همچنین از مدیر محترم مؤسسهٔ انتشاراتی دبیرستان انرژی اتمی جناب آقای مهندس متولی به خاطر چاپ این اثر تشکر و قدردانی کنم.

علی‌رضا علی‌پور، اردیبهشت ۱۳۸۶

فصل ۱

اصول شمارش

در این فصل اصول شمارش را بیان می‌کنیم و با حل مسأله‌هایی متنوع روش‌های به‌کارگیری این اصول را در حل مسائل شمارشی آموزش می‌دهیم.

۱—۱ اصل ضرب

مسألهٔ ۱.۱.۱ یک تولیدی لباس ورزشی در ۳ اندازهٔ کوچک، متوسط و بزرگ و در چهار رنگ سفید، آبی، قرمز و زرد لباس تولید می‌کند. این تولیدی چند نوع مختلف لباس تولید می‌کند؟

راه حل. توجه کنید که طبق فرض مسأله نوع هر لباس با اندازه و رنگ آن مشخص می‌شود، یعنی اگر دو لباس، هم‌اندازه و هم‌رنگ باشند از یک نوع‌اند و برعکس اگر دو لباس از یک نوع باشند هم‌اندازه و هم‌رنگ‌اند. حال قفسه‌ای مانند شکل صفحهٔ بعد در نظر می‌گیریم و هر لباس را برحسب اندازه و رنگ آن در قسمت مربوطه قرار می‌دهیم. با توجه به آن‌چه گفتیم لباس‌هایی که در یک قسمت قرار می‌گیرند از یک نوع‌اند و لباس‌هایی که در قسمت‌های مختلف قرار می‌گیرند از یک نوع نیستند. اکنون واضح است که این تولیدی $۱۲ = ۴ \times ۳$

نوع مختلف لباس می‌تواند تولید کند.

	زرد	قرمز	آبی	سفید
بزرگ				
متوسط				
کوچک				

اصل ضرب (صورت ساده). فرض کنید نحوهٔ انجام کاری را بتوان به دو مرحله تجزیه کرد، مرحلهٔ اول به m طریق و به‌ازای هر طریق نحوهٔ انجام مرحلهٔ اول، مرحلهٔ دوم به n طریق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به mn طریق قابل انجام است.

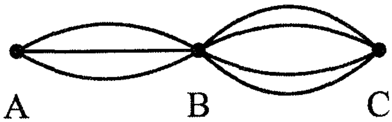
در مسألهٔ قبل عمل تولید یک نوع لباس را می‌توانیم به دو مرحله تجزیه کنیم، مرحلهٔ اول انتخاب اندازه و مرحلهٔ دوم انتخاب رنگ. مرحلهٔ اول به ۳ طریق و به‌ازای هر طریق انتخاب اندازه، مرحلهٔ دوم به ۴ طریق قابل انجام است. لذا طبق اصل‌ضرب عمل تولید یک نوع لباس به ۴×۳ طریق قابل انجام است یا معادلاً تولیدی می‌تواند ۱۲ نوع مختلف لباس تولید کند.

در حالت کلی اصل‌ضرب در مسأله‌هایی که بتوان نحوهٔ انجام کار را به چند مرحله تجزیه کرد کاربرد دارد.

اصل‌ضرب (صورت کلی). فرض کنید نحوهٔ انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد، مرحلهٔ اول به $n_۱$ طریق قابل انجام باشد و به‌ازای هر i، $۲ \leq i \leq k$، مرحلهٔ i ام مستقل از نحوهٔ انجام مراحل اول تا $i - ۱$ ام به n_i طریق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به $n_۱ n_۲ \ldots n_k$ طریق قابل انجام است.

مسألهٔ ۲.۱.۱ بین دو شهر A و B سه جاده و بین شهرهای B و C چهار جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت به‌طوری‌که‌هر

جاده حداکثر یک بار طی شود؟



راه حل. عمل رفت و برگشت را به چهار مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول، رفتن از A به B، مرحلهٔ دوم، رفتن از B به C، مرحلهٔ سوم، رفتن از C به B و مرحلهٔ چهارم، رفتن از B به A. مرحلهٔ اول به ۳ طریق، مرحلهٔ دوم مستقل از نحوهٔ انجام مرحلهٔ اول به ۴ طریق، مرحلهٔ سوم مستقل از نحوهٔ انجام مراحل اول و دوم به ۳ طریق و مرحلهٔ چهارم مستقل از نحوهٔ انجام مراحل اول، دوم و سوم به ۲ طریق قابل انجام است. لذا کل کار به ۲ × ۳ × ۴ × ۳ طریق قابل انجام است.

مسألهٔ ۳.۱.۱ الف) چند کلمهٔ سه حرفی با حروف a، b، c، d و e می‌توان نوشت؟ ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟ ج) در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

راه حل. عمل نوشتن کلمهٔ سه حرفی را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول، نوشتن حرف اول، مرحلهٔ دوم، نوشتن حرف دوم و مرحلهٔ سوم، نوشتن حرف سوم. در قسمت الف هر مرحله مستقل از نحوهٔ انجام مراحل قبل به ۵ طریق قابل انجام است. لذا پاسخ قسمت الف برابر $۵^{۳}$ است.

۵ ۵ ۵

۱ ۲ ۳

در قسمت ب برای حرف اول کلمه ۵ انتخاب و برای هر انتخاب حرف اول، ۴ انتخاب برای حرف دوم و برای هر انتخاب از حرف‌های اول و دوم، ۴ انتخاب برای حرف سوم وجود دارد. لذا پاسخ قسمت ب برابر ۴ × ۴ × ۵ است.

۵ ٤ ٤

۱ ۲ ۳

در قسمت ج مراحل اول، دوم و سوم مستقل از نحوهٔ انجام مراحل قبل به ترتیب به ۵، ۴ و ۳ طریق قابل انجام‌اند. لذا پاسخ قسمت ج برابر ۳ × ۴ × ۵ است.

۵	۴	۳
۱	۲	۳

در برخی از مسائل شمارشی انتخاب مناسب ترتیب مراحل انجام، حل مسأله را بسیار ساده می‌کند.

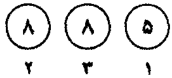
مسألهٔ ۴.۱.۱ چند عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه حل. عمل نوشتن یک عدد سه رقمی با ویژگی‌های گفته شده را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. ابتدا نوشتن رقم صدگان، سپس رقم دهگان و در نهایت رقم یکان. برای رقم صدگان ۹ انتخاب (هر یک از رقم‌های ۱ تا ۹) و به‌ازای هر طریق انتخاب رقم صدگان، ۹ انتخاب برای رقم دهگان (هر یک از رقم‌های ۰ تا ۹ غیر از رقمی که در مرتبهٔ صدگان قرار گرفته) وجود دارد.

۹	۹	
۱	۲	۳

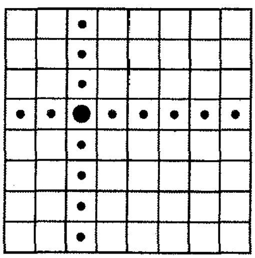
حال باید یک رقم فرد در مرتبهٔ یکان قرار دهیم. اگر رقم‌های دهگان و صدگان هر دو فرد باشند برای رقم یکان ۳ انتخاب، اگر فقط یکی از این دو رقم فرد باشند برای رقم یکان ۴ انتخاب و اگر هر دو رقم زوج باشند برای رقم یکان ۵ انتخاب وجود دارد. پس تعداد راه‌های انجام مرحلهٔ سوم به نحوهٔ انجام مراحل اول و دوم وابسته است و لذا اینجا از اصل‌ضرب نمی‌توانیم استفاده کنیم. در واقع ترتیب مراحل نوشتن عدد سه رقمی به طور مناسب انتخاب نشده است. با توجه به این که در این مسأله رقم‌های یکان و صدگان محدودیت دارند (رقم یکان باید فرد و رقم صدگان باید ناصفر باشد) لذا برای نوشتن عدد سه رقمی با ویژگی‌های مورد نظر ابتدا رقم یکان، سپس رقم صدگان و در نهایت رقم دهگان را می‌نویسیم و به راحتی

می‌توان دید که این سه مرحله به ترتیب به ۵، ۸ و ۸ طریق قابل انجام هستند، لذا پاسخ مسأله برابر ۸ × ۸ × ۵ است.



مسألهٔ ۵.۱.۱ به چند طریق می‌توان یک مهرهٔ رخ سفید و یک مهرهٔ رخ سیاه را در دو خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد به‌طوری‌که‌یکدیگر را تهدید نکنند؟ (دو رخ در صورتی یکدیگر را تهدید می‌کنند که در یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشند.)

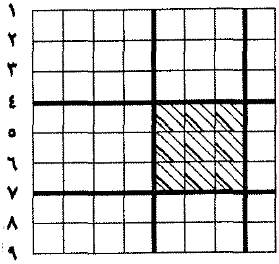
راه حل. عمل قراردادن دو رخ را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول، قرار دادن رخ سفید و مرحلهٔ دوم، قرار دادن رخ سیاه. برای قرار دادن رخ سفید ۶۴ انتخاب وجود دارد و رخ سفید در هر خانه‌ای که قرار گیرد برای رخ سیاه ۴۹ انتخاب وجود دارد (زیرا رخ سفید تمام خانه‌های یک سطر و یک ستون از صفحهٔ شطرنج را تهدید می‌کنند و در واقع رخ سیاه را باید در یکی از خانه‌های واقع در تقاطع ۷ سطر و ۷ ستون باقی‌مانده قرار دهیم). لذا پاسخ مسأله برابر ۴۹ × ۶۴ است.



مسألهٔ ۶.۱.۱ چند مربع ۳ × ۳ در صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ وجود دارد؟

راه حل. هر مربع ۳ × ۳ از برخورد دو خط افقی به فاصلهٔ ۳ و دو خط عمودی به فاصلهٔ ۳ ایجاد می‌شود. لذا عمل ساختن یک مربع ۳ × ۳ را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم، مرحلهٔ اول،

انتخاب دو خط افقی به فاصلهٔ ۳ و مرحلهٔ دوم، انتخاب دو خط عمودی به فاصلهٔ ۳.



هر یک از این دو مرحله به ٦ طریق قابل انجام هستند (به عنوان مثال برای انتخاب دو خط افقی به فاصلهٔ ۳ باید دو خط افقی با شماره‌های k و $k+۳$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند انتخاب کنیم و چون ۹ خط افقی وجود دارد لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از ۱، ۲، ... و ٦. پس به ٦ طریق می‌توان دو خط افقی به فاصلهٔ ۳ انتخاب کرد). در نتیجه $۳٦ = ٦ \times ٦$ مربع ۳×۳ در صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ وجود دارد.

مسألهٔ ۷.۱.۱ یک مدرسه ٦ کلاس ۳۰ نفره دارد. قرار است از هر کلاس حداکثر یک نفر برای شرکت در مسابقهٔ ریاضی انتخاب شود.

الف) به چند طریق می‌توان شرکت‌کنندگان در مسابقهٔ ریاضی را تعیین کرد؟ (توجه کنید یک حالت این است که هیچ فردی در مسابقه شرکت نکند.)

ب) اگر قرار باشد که از هر کلاس دقیقاً یک نفر انتخاب شود پاسخ قسمت الف چگونه خواهد بود؟

راه حل. الف) کلاس‌ها را با اعداد ۱، ۲، ... و ٦ نام‌گذاری می‌کنیم. عمل انتخاب افراد شرکت‌کننده در مسابقه را به ٦ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول، انتخاب حداکثر یک نفر از کلاس ۱، ... و مرحلهٔ ششم، انتخاب حداکثر یک نفر از کلاس ٦. هر مرحله به ۳۱ طریق قابل انجام است (از هر کلاس یا هیچ فردی انتخاب نمی‌شود یا یکی از ۳۰ دانش‌آموز انتخاب می‌شود). لذا پاسخ برابر $۳۱^٦$ است.

ب) مشابه راه حل قسمت الف عمل انتخاب شرکت‌کنندگان را به ۶ مرحله تجزیه می‌کنیم. در این قسمت هر مرحله به ۳۰ طریق قابل انجام است و لذا پاسخ برابر $۳۰^۶$ است.

مسألهٔ ۸.۱.۱ الف) به چند طریق می‌توان یک سیب، یک پرتقال و یک گلابی را بین ۵ نفر توزیع کرد؟ ب) در چند حالت به هر نفر حداکثر یک میوه می‌رسد؟

راه حل. عمل توزیع میوه‌ها را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول، توزیع سیب، مرحلهٔ دوم، توزیع پرتقال و مرحلهٔ سوم، توزیع گلابی. در قسمت الف هر یک از این مراحل به ۵ طریق قابل انجام است، لذا پاسخ قسمت الف برابر $۵^۳$ است و در قسمت ب مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب به ۵، ۴ و ۳ طریق قابل انجام هستند، لذا پاسخ قسمت ب برابر $۵ \times ۴ \times ۳$ است.

مسألهٔ ۹.۱.۱ مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

راه حل. عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول تعیین جای عدد ۱، ... و مرحلهٔ پنجم تعیین جای عدد ۵. هر یک از این مراحل مستقل از نحوهٔ انجام مراحل قبل به ۲ طریق قابل انجام است (در واقع قرار دادن عدد مورد نظر در داخل زیرمجموعه یا خارج آن). لذا به $۲^۵$ طریق می‌توان یک زیرمجموعه از X را ساخت. پس X، $۲^۵$ زیرمجموعه دارد.

در حالت کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۱۰.۱.۱ یک مجموعه n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.

مسألهٔ ۱۱.۱.۱ در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \ldots, ۷\}$ بزرگترین عضو برابر ۵ است؟

راه حل. عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۷ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول تعیین جای عدد ۱، ... و مرحلهٔ هفتم تعیین جای عدد ۷. هر یک از مراحل اول تا چهارم به ۲ طریق قابل انجام‌اند و هر یک از ۳ مرحلهٔ باقی‌مانده به یک طریق، زیرا عدد ۵ باید داخل زیرمجموعه قرار گیرد و اعداد ۶ و ۷ باید خارج زیرمجموعه قرار گیرند. لذا پاسخ مسأله برابر $۲^۴$ است.

مسألهٔ ۱۲.۱.۱ عدد ۱۵۰۰ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

راه‌حل. تجزیهٔ استاندارد ۱۵۰۰ به صورت $۵^۳ \times ۳^۱ \times ۲^۲$ است. لذا هر مقسوم‌علیه مثبت ۱۵۰۰ به صورت $۲^a \times ۳^b \times ۵^c$ است که $۰ \leq a \leq ۲$، $۰ \leq b \leq ۱$ و $۰ \leq c \leq ۳$. حال عمل ساختن یک مقسوم‌علیه ۱۵۰۰ را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول، انتخاب a، مرحلهٔ دوم، انتخاب b و مرحلهٔ سوم، انتخاب c. مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب به ۳، ۲ و ۴ طریق قابل انجام‌اند (مثلاً a برابر ۰، ۱ یا ۲ است لذا ۳ انتخاب برای a وجود دارد). در نتیجه ۱۵۰۰ دارای $۳ \times ۲ \times ۴ = ۲۴$ مقسوم‌علیه مثبت است.

مسألهٔ ۱۳.۱.۱ چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ تعداد فردی عضو دارند؟

راه‌حل. عمل ساختن یک زیرمجموعه از X را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول تعیین جای عدد ۱، ... و مرحلهٔ پنجم تعیین جای عدد ۵. هر یک از مراحل اول تا چهارم به ۲ طریق قابل انجام‌اند و مرحلهٔ پنجم به یک طریق قابل انجام است زیرا اگر تعداد زوجی عدد از اعداد ۱ تا ۴ داخل زیرمجموعه قرار گرفته باشند، عدد ۵ باید داخل زیرمجموعه قرار گیرد و اگر تعداد فردی عدد از اعداد ۱ تا ۴ داخل زیرمجموعه قرار گرفته باشند، عدد ۵ باید خارج زیرمجموعه قرار گیرد. لذا پاسخ مسأله برابر $۲^۴$ است.

در حالت کلی قضیهٔ بعد درست است.

قضیهٔ ۱۴.۱.۱ یک مجموعهٔ n عضوی $۲^{n-۱}$ زیرمجموعهٔ فرد عضوی و $۲^{n-۱}$ زیرمجموعهٔ زوج عضوی دارد.

مسائل

۱) به چند طریق می‌توان کمیته‌ای دو نفره متشکل از یک مرد و یک زن از میان ٦ مرد و ۸ زن انتخاب کرد؟

۲) از میان ۱۰ زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توان یک مرد و یک زن انتخاب کرد به‌طوری‌که همسر یکدیگر نباشند؟

۳) گچ‌های یک مدرسه در ۲ اندازه، ۵ رنگ و ۳ قطر مختلف هستند. حداکثر چند نوع گچ در این مدرسه وجود دارد؟

۴) چند عدد چهاررقمی فرد با رقم‌های متمایز وجود دارد؟

۵) چند کلمهٔ چهار حرفی با حروف a، b، c، d، e و f می‌توان نوشت به‌طوری‌که

الف) تکرار حروف مجاز باشد؟

ب) تکرار حروف مجاز نباشد؟

٦) الف) در چند کلمهٔ چهار حرفی با حروف انگلیسی حروف اول و آخر صدا دارند؟

ب) در چندتا از این کلمات فقط حروف اول و آخر صدا دارند؟

۷) یک عدد ۵ رقمی را متقارن گوییم هرگاه به صورت $\overline{abcba}$ باشد (مثلاً اعداد ۱۱۱۱۱، ۲۳۲۳۲ و ۷۲۸۲۷ متقارنند). چند عدد ۵ رقمی متقارن وجود دارد؟

۸) الف) در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف a، b، c، d، e، f و g حروف مجاور متمایزند؟

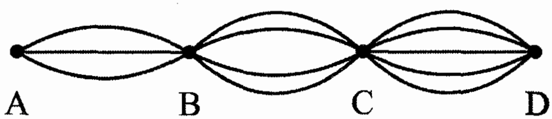
ب) در چندتا از این کلمات هر سه حرف مجاور متمایزند؟

۹) الف) به چند طریق می‌توان یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه را در دو خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد به‌طوری‌که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

ب) به چند طریق می‌توان سه مهرهٔ متمایز را در سه خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد به‌طوری‌که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند؟

۱۰) چند عدد چهاررقمی زوج با رقم‌های متمایز با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ٦ وجود دارد؟

۱۱) شکل زیر را در نظر بگیرید.



الف) به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

ب) به چند طریق می‌توان از A به D رفت و به A برگشت؟

ج) در چند مسیر از مسیرهای قسمت (ب) هر جاده حداکثر یک‌بار طی شده است؟

۱۲) در صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ چند مستطیل ۴ × ۳ (افقی یا عمودی) وجود دارد؟

۱۳)* الف) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰۰۰\}$ دقیقاً یک رقم ۵ دارند؟

ب) چند عدد از این مجموعه دقیقاً یک رقم ۷ و یک رقم ۸ دارند؟

۱۴) الف) به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در ۱۰ اتاق متمایز توزیع کرد؟

ب) در چند حالت در هر اتاق حداکثر یک نفر قرار می‌گیرد؟

۱۵) یک امتحان از ۱۰ تست چهارگزینه‌ای تشکیل شده است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به این سؤالات پاسخ دهد به‌طوری‌که

الف) پاسخ‌دادن به هر تست الزامی باشد (یعنی از هر تست یکی از ۴ گزینه را به عنوان پاسخ علامت بزند)؟

ب) پاسخ‌دادن به همهٔ تست‌ها الزامی نباشد؟

۱۶) پس از ضرب، حاصل عبارت زیر چند جملهٔ متمایز خواهد داشت؟

$$(x+y)(a+b+c)(e+f+g)(h+i)$$

۱۷)* به چند طریق می‌توان یک مهرهٔ اسب سفید و یک مهرهٔ اسب سیاه را در صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد به‌طوری‌که یکدیگر را تهدید کنند؟

۱۸)* چند عدد ۷ رقمی با رقم‌های ۱، ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت؟

۱۹)* ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به ۵ تیم دو نفره تقسیم کرد؟

۲۰)* یک تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) در چند حالت مجموع اعداد رو شده فرد است؟

ب) در چند حالت مجموع اعداد رو شده بر ۳ بخشپذیر است؟

۲۱) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ اعداد ۱ و ۲ وجود دارند ولی عدد ۳ وجود ندارد؟

۲۲) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ کوچکترین عضو برابر ۳ و بزرگترین عضو برابر ۹ است؟

۲۳) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ اختلاف کوچکترین و بزرگترین عضو برابر ۵ است؟

۲۴) ۳۰ سکو در یک ردیف از چپ به راست با شماره‌های ۱ تا ۳۰ قرار دارند. یک قورباغه روی سکوی شمارهٔ ۱ قرار دارد و می‌خواهد خود را به روی سکوی شمارهٔ ۳۰ برساند. این قورباغه در هر حرکت هر چند سکو که بخواهد می‌تواند به سمت راست پرش کند (از ۱ تا ۲۹ سکو). قورباغه به چند طریق می‌تواند خود را به سکوی شمارهٔ ۳۰ برساند؟

۲۵) الف) عدد $10^{12} \times 6^{8} \times 4^{10}$ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

ب) چند مقسوم‌علیه مثبت از این عدد بر ۳۰۰۰ بخش‌پذیرند؟

۲۶) اعداد $2^{10} \times 3^{12} \times 5^{8} \times 7^{6}$ و $2^{5} \times 3^{17} \times 7^{9} \times 11^{3}$ چند مقسوم‌علیه مشترک مثبت دارند؟

۲۷) ۱۰ سکهٔ ۵ تومانی، ۸ سکهٔ ۱۰ تومانی و ۱۷ سکهٔ ۲۵ تومانی در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان یک قلک را با تعدادی (حداقل صفر و حداکثر ۳۵) از این سکه‌ها پر کرد؟ (توجه کنید که سکه‌های هم ارزش یکسانند.)

۲۸)* به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰ را در یک ردیف قرار داد به‌طوری‌که هر عدد در این ردیف (غیر از اولین عدد) از همهٔ اعداد سمت چپ خود بزرگتر یا از همهٔ این اعداد کوچکتر باشد؟

۲۹) ۵ سکهٔ ۱ ریالی (یکسان) و یک عدد از هر یک از سکه‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ ریالی در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۵ تا از این سکه‌ها را در یک قلک انداخت؟

۳۰) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 10\}$ اعداد ۱ و ۲ وجود دارند، عدد ۷ وجود ندارد و در ضمن تعداد اعضا عددی فرد است؟

۳۱) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 10\}$ اختلاف کوچکترین و بزرگترین عضو برابر ۵ است و در ضمن تعداد اعضا عددی زوج است؟

۳۲) چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 10\}$ تعداد فردی عضو از $\{1, \ldots, 5\}$ و تعداد زوجی عضو از $\{6, \ldots, 10\}$ را دارد؟

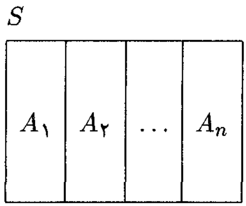
۱ــ۲ اصل جمع

مثال ۱.۲.۱ در یک دبیرستان ۳۰ دانش‌آموز در کلاس اول، ۲۵ دانش‌آموز در کلاس دوم و ۳۰ دانش‌آموز در کلاس سوم تحصیل می‌کنند. در این صورت تعداد دانش‌آموزان مدرسه برابر $85 = 30 + 25 + 30$ است.

کلاس اول	کلاس دوم	کلاس سوم
۳۰ نفر	۲۵ نفر	۳۰ نفر

اصل جمع. فرض کنید مجموعهٔ S اجتماع مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای A_1، A_2، ... و A_n باشد. در این صورت

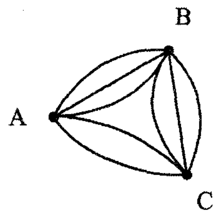
$$|S| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$



برای به‌کار بردن اصل جمع مسأله را به حالت‌هایی مجزا تقسیم می‌کنیم که در ضمن همهٔ حالت‌های ممکن را پوشش دهد. هنر استفاده از اصل جمع در واقع این است که مسأله را

به حالت‌هایی تقسیم کنیم که به راحتی قابل شمارش باشند و در ضمن تعداد حالت‌ها نیز حتی‌المقدور کم باشد.

مسألهٔ ۲.۲.۱ بین شهرهای A و B، ۳ جاده، بین A و C، ۲ جاده و بین B و C، ۳ جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان با طی حداکثر ۲ جاده از A به B رفت؟



راه‌حل. مسیرهای بین A و B را که حداکثر ۲ جاده دارند به دو دستهٔ تقسیم می‌کنیم. دستهٔ اول را مسیرهای مستقیم از A به B و دستهٔ دوم را مسیرهایی از A به B در نظر می‌گیریم که از C می‌گذرند. تعداد مسیرهای دستهٔ اول برابر ۳ و تعداد مسیرهای دستهٔ دوم برابر $۲ \times ۳ = ٦$ است. چون این دو دسته اشتراکی ندارند، لذا بنا به اصل جمع ۹ مسیر از A به B وجود دارد.

مسألهٔ ۳.۲.۱ به چند طریق می‌توان هر یک از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ را در خانه‌ای از یک جدول ۳×۳ نوشت به‌طوری‌که دو خانهٔ شامل اعداد ۱ و ۲ ضلع مشترک داشته باشند؟ مثلاً جدول زیر این ویژگی را دارد.

٦	۸	۴
۱	۵	۳
۲	۹	۷

راه‌حل. عمل نوشتن اعداد را به ۹ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحلهٔ اول نوشتن عدد ۱، ... و مرحلهٔ نهم نوشتن عدد ۹. برای نوشتن عدد ۱، ۹ انتخاب وجود دارد. تعداد راه‌های نوشتن عدد ۲ به خانه‌ای که عدد ۱ در آن نوشته شده وابسته است. لذا خانه‌های جدول را همانند

شکل زیر به سه دستهٔ A، B و C تقسیم می‌کنیم.

A	B	A
B	C	B
A	B	A

اگر عدد ۱ در یکی از خانه‌های شامل A، B یا C قرار گیرد برای عدد ۲ به ترتیب ۲، ۳ و ۴ انتخاب وجود دارد. لذا طبق اصل جمع به

$$۴ \times ۲ + ۴ \times ۳ + ۱ \times ۴ = ۲۴$$

طریق می‌توان اعداد ۱ و ۲ را در جدول نوشت. به‌ازای هر طریق نوشتن عددهای ۱ و ۲ در جدول برای اعداد ۳، ۴، ... و ۹ به ترتیب ۷، ٦، ... و ۱ انتخاب وجود دارد. لذا پاسخ مسأله برابر $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ٦ \times ۷ \times ۲۴$ است.

مسألهٔ ۴.۲.۱ کمیسیون ورزش ۸ عضو و کمیسیون اقتصاد ۱۲ عضو دارد که ۳ عضو آن‌ها مشترک است. می‌خواهیم از بین اعضای هر کمیسیون یک نفر را به عنوان نمایندهٔ کمیسیون معرفی کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به‌طوری‌که‌نمایندگان دو کمیسیون دو فرد مختلف باشند؟

راه‌حل. نمایندهٔ کمیسیون ورزش را به ۸ طریق می‌توان انتخاب کرد. تعداد راه‌های انتخاب نمایندهٔ کمیسیون اقتصاد بسته به این که نمایندهٔ کمیسیون ورزش از اعضای مشترک باشد یا نباشد تفاوت دارد. لذا دو حالت در نظر می‌گیریم. حالت اول این که نمایندهٔ کمیسیون ورزش از اعضای مشترک باشد که در این حالت برای نمایندهٔ ورزش ۳ و برای نمایندهٔ اقتصاد ۱۱ انتخاب وجود دارد و حالت دوم این که نمایندهٔ کمیسیون ورزش از اعضای مشترک نباشد که در این حالت برای نمایندگان دو کمیسیون به ترتیب ۵ و ۱۲ انتخاب وجود دارد. لذا پاسخ برابر $۹۳ = ۱۲ \times ۵ + ۱۱ \times ۳$ است.

مسألهٔ ۵.۲.۱ چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه‌حل. عمل نوشتن یک عدد سه رقمی با شرایط فوق را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. ابتدا نوشتن رقم یکان، سپس رقم صدگان و در نهایت رقم دهگان.

◯	◯	◯
۱	۳	۲

برای رقم یکان ۵ انتخاب وجود دارد (ارقام ۰، ۲، ۴، ٦ و ۸). تعداد راه‌های نوشتن رقم صدگان به رقم یکان بستگی دارد. اگر رقم یکان صفر باشد برای رقم صدگان ۹ و برای رقم دهگان ۸ انتخاب وجود دارد.

۱	۸	۹
۱	۳	۲

اگر رقم یکان ناصفر باشد برای رقم صدگان ۸ و برای رقم دهگان نیز ۸ انتخاب وجود دارد.

٤	۸	۸
۱	۳	۲

در نتیجه تعداد اعداد سه رقمی زوج با ارقام متمایز برابر است با

$$۹ \times ۸ \times ۱ + ۸ \times ۸ \times ۴ = ۳۲۸$$

مسألهٔ ٦.۲.۱ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد طبیعی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

راه‌حل. هر عدد طبیعی با ویژگی‌های گفته شده حداکثر ۵ رقم دارد. لذا این اعداد را به ۵ دسته تقسیم می‌کنیم. دستهٔ اول اعداد یک رقمی، دستهٔ دوم اعداد دو رقمی، ... و دستهٔ پنجم اعداد ۵ رقمی. تعداد اعداد دسته‌های اول تا پنجم به ترتیب برابرند با ۵، ۴×۵، $۳ \times ۴ \times ۵$، $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵$ و $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵$. لذا طبق اصل جمع پاسخ مسأله برابر است با

$$۵ + ۵ \times ۴ + ۵ \times ۴ \times ۳ + ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ + ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳۲۵$$

مسألهٔ ۷.۲.۱ کلیهٔ کلمات ۴ حرفی با حروف متمایز را که با حروف a، b، c، d، e، f، g و h می‌توان نوشت در یک لیست برحسب حروف الفبا مرتب کرده‌ایم. مثلاً اولین کلمهٔ لیست $abcd$ و دومین کلمه $abce$ است. کلمهٔ $chef$ چندمین کلمه در این لیست است؟

راه‌حل. کلیهٔ کلماتی را که در لیست قبل از کلمهٔ $chef$ قرار دارند به ۴ دسته تقسیم می‌کنیم. در دستهٔ اول کلماتی را قرار می‌دهیم که حرف اول آن‌ها یکی از حروف a و b است. تعداد کلمات این دسته برابر است با

$$\underset{1}{2}\;\underset{2}{7}\;\underset{3}{6}\;\underset{4}{5} = 420$$

در دستهٔ دوم کلماتی را قرار می‌دهیم که حرف اول آن‌ها c و حرف دوم آن‌ها یکی از حروف a، b، d، e، f و g است. تعداد این کلمات برابر است با

$$\underset{1}{1}\;\underset{2}{6}\;\underset{3}{6}\;\underset{4}{5} = 180$$

در دستهٔ سوم کلماتی را قرار می‌دهیم که حرف اول و دوم آن‌ها به ترتیب c و h و حرف سوم آن‌ها یکی از حروف a، b و d است. تعداد این کلمات برابر است با

$$\underset{1}{1}\;\underset{2}{1}\;\underset{3}{3}\;\underset{4}{5} = 15$$

و در دستهٔ چهارم کلماتی را قرار می‌دهیم که سه حرف اول آن‌ها به ترتیب c، h و e و حرف چهارم آن‌ها یکی از حروف a، b و d است. تعداد این کلمات نیز برابر با ۳ است. لذا در لیست

$$420 + 180 + 15 + 3 = 618$$

کلمه قبل از $chef$ قرار دارد و در نتیجه $chef$ کلمهٔ ۶۱۹ ام لیست می‌باشد.

مسألهٔ ۸.۲.۱ در صفحهٔ شطرنجی 8×8 چند مستطیل با مساحت ۱۶ وجود دارد؟

راه‌حل. مستطیل‌های با مساحت ۱٦ از سه نوع‌اند، 8×2، 4×4 و 2×8. تعداد این مستطیل‌ها در صفحهٔ شطرنجی 8×8 به ترتیب برابرند با 7×1، 5×5 و 1×7. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$7 + 25 + 7 = 39$$

مسألهٔ ۹.۲.۱ کلیهٔ کلمات سه حرفی را که با حروف a، b، c، d و e می‌توان نوشت روی یک تخته نوشته‌ایم. روی این تخته چند بار حرف a نوشته شده است؟

راه‌حل اول. حروف a ی تخته را به ۳ دسته تقسیم می‌کنیم، دستهٔ اول را a هایی می‌گیریم که حرف اول یک کلمه هستند، دستهٔ دوم a هایی که حرف دوم یک کلمه هستند و دستهٔ سوم a هایی که حرف سوم یک کلمه هستند. تعداد کلماتی که حرف اول آن‌ها a است برابر 5^2 است، لذا در دستهٔ اول ۲۵ حرف a وجود دارد و به طور مشابه دسته‌های دوم و سوم نیز ۲۵ حرف a دارند. پس کلاً ۷۵ حرف a روی تخته نوشته شده است.

راه‌حل دوم. اگر حرف a، x بار روی تخته نوشته شده باشد، آنگاه طبق تقارن هر یک از حروف b، c، d و e نیز x بار روی تخته نوشته شده‌اند. پس روی تخته کلاً $5x$ حرف نوشته شده است. اما از سوی دیگر تعداد کلمات سه حرفی با حروف a، b، c، d و e برابر 5^3 است و لذا کلاً 3×5^3 حرف روی تخته نوشته شده است، پس

$$5x = 5^3 \times 3$$

و لذا $x = 75$.

مسائل

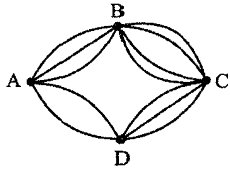
۱) به چند طریق می‌توان یک نفر از بین ٦ مرد و ۸ زن انتخاب کرد؟

۲) به چند طریق می‌توان از بین ۵ کلاس اولی، ۷ کلاس دومی و ٦ کلاس سومی دو نفر انتخاب کرد که هم کلاس نباشند؟

۳) چند عدد ۵ رقمی فقط یک رقم ۳ دارند؟

۴)* به چند طریق می‌توان یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه را در دو خانهٔ مجاور از صفحهٔ شطرنجی 8×8 قرار داد؟ (دو خانه را مجاور گوییم هرگاه حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.)

۵) شکل زیر را در نظر بگیرید.



الف) به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

ب) به چند طریق می‌توان از A به C رفت و به A برگشت؟

ج) در چند مسیر از مسیرهای قسمت (ب) هر جاده حداکثر یک‌بار طی شده است؟

٦) با حروف a، b، c و d چند کلمه می‌توان نوشت که حداقل ۳ و حداکثر ۵ حرف داشته باشند؟

۷) در چند عدد ۷ رقمی، ۵ رقم متوالی برابر ۳ وجود دارد؟

۸) چند زوج مرتب (x, y) از اعداد صحیح در نامعادلهٔ $|x| + |y| \leq 100$ صدق می‌کنند؟

۹)* به چند طریق می‌توان یک وزیر سیاه و یک وزیر سفید را در دو خانه از صفحهٔ شطرنجی 8×8 قرار داد به‌طوری‌که یکدیگر را تهدید کنند؟

۱۰) چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز بزرگتر از ٦٣٢۰ وجود دارد؟

۱۱)* اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را روی کاغذ نوشته‌ایم. رقم ۵ چند بار نوشته شده‌است؟

۱۲)* تمام اعداد چهاررقمی را به ترتیب و بدون فاصله در یک ردیف نوشته‌ایم. عبارت ۲۵ چند بار در این ردیف ظاهر شده است؟

۱۳) الف) چند عدد چهاررقمی با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت که بر ۴ بخش‌پذیر باشند؟

ب) چندتا از این اعداد ارقام متمایز دارند؟

۱۴) کلیهٔ کلمات ۴ حرفی با حروف a، b، c، d و e را روی کاغذ نوشته‌ایم. حرف a چند بار روی کاغذ نوشته شده است؟

۱۵) کلیهٔ کلمات ۴ حرفی با حروف متمایز را که با حرف‌های a، b، c، d، e و f می‌توان نوشت روی کاغذ نوشته‌ایم. حرف a چند بار روی کاغذ نوشته شده است؟

۱۶)* کلیهٔ اعداد چهاررقمی با ارقام ۱، ۲، ... و ٦ را روی کاغذ نوشته‌ایم. مجموع این اعداد چند است؟

۱۷)* کلیهٔ اعداد چهاررقمی زوج با ارقام متمایز را که با رقم‌های ۱، ۲، ... و ۸ می‌توان نوشت روی کاغذ نوشته‌ایم. مجموع این اعداد چند است؟

۱۸)* چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند؟

۱۹) بزرگترین عضو هر زیرمجموعهٔ ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را روی کاغذ یادداشت کرده‌ایم. مجموع این اعداد چند است؟

۲۰)* الف) به‌ازای چند عدد چهاررقمی مانند $\overline{abcd}$ مجموع دو عدد $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ عددی فرد است؟ (مثلاً اعداد ۲۵۰۴ و ۳٦٦۵ این ویژگی را دارند.)

ب) در چندتا از این اعداد، ارقام متمایزند؟

۲۱)* به چند طریق می‌توان هر یک از اعداد مجموعهٔ {۱, ۲, ..., ۹} را در خانه‌ای از یک جدول ۳ × ۳ نوشت به‌طوری‌که خانه‌های شامل اعداد ۲ و ۳ با خانهٔ شامل عدد ۱ ضلع مشترک داشته باشند؟

۲۲) چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز مضرب ۵ هستند؟

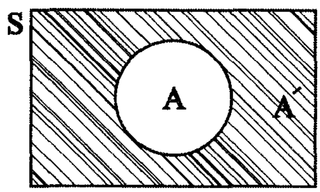
۲۳) در چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز رقم یکان فرد و رقم دهگان بزرگتر از ۴ است؟

۲۴) کلیهٔ کلمات ۵ حرفی با حروف a، b، c، d، e، f، g و h را در یک لیست برحسب حروف الفبا مرتب کرده‌ایم. کلمه $defgh$ چندمین کلمه در این لیست است؟

۱—۳ اصل متمم

در برخی از مسأله‌های شمارشی، محاسبهٔ تعداد حالت‌های نامطلوب از محاسبهٔ تعداد حالت‌های مطلوب ساده‌تر است. برای حل این گونه مسائل غالباً از اصل متمم استفاده می‌کنیم.

اصل متمم. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ مرجع S باشد. در این صورت تعداد اعضایی از S که در A قرار ندارند (تعداد اعضای متمم A) برابر $|S| - |A|$ است.



مسألهٔ ۱.۳.۱ در چند عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود دارد؟

راه‌حل. تعداد اعداد ۴ رقمی برابر است با

۹ ۱۰ ۱۰ ۱۰ = ۹۰۰۰

و تعداد اعداد ۴ رقمی که رقم ۵ را ندارند برابر است با

۸ ۹ ۹ ۹ = ۵۸۳۲

در نتیجه تعداد اعداد ۴ رقمی که رقم ۵ را دارند برابر است با

$$۹۰۰۰ - ۵۸۳۲ = ۳۱۶۸$$

مسألهٔ ۲.۳.۱ در چند کلمهٔ چهارحرفی با حروف a، b، c، d، e و f حرف تکراری وجود دارد؟

راه‌حل. تعداد کل کلمات چهارحرفی با حروف a، b، c، d، e و f برابر است با

۶ ۶ ۶ ۶ = ۱۲۹۶

و تعداد کلمات چهارحرفی با این ۶ حرف که حرف تکراری ندارند برابر است با

۶ ۵ ۴ ۳ = ۳۶۰

در نتیجه پاسخ مسأله برابر است با

$$۱۲۹۶ - ۳۶۰ = ۹۳۶$$

مسألهٔ ۳.۳.۱ در چند عدد چهاررقمی، رقم هزارگان با حداقل یکی از سه رقم دیگر برابر است؟

راه‌حل. کلاً ۹۰۰۰ عدد چهاررقمی وجود دارد که از این تعداد در

۹ ۹ ۹ ۹ = ۶۵۶۱

۱ ۲ ۳ ۴

عدد هیچ یک از رقم‌های یکان، دهگان و صدگان با رقم هزارگان برابر نیستند. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$۹۰۰۰ - ۶۵۶۱ = ۲۴۳۹$$

مسألهٔ ۴.۳.۱ در چند عدد ۴ رقمی بزرگترین رقم برابر ۶ است؟

راه‌حل. تعداد اعداد چهاررقمی با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ برابر است با

$$۶ \quad ۷ \quad ۷ \quad ۷ = ۲۰۵۸$$

و تعداد اعداد چهاررقمی با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ برابر است با

$$۵ \quad ۶ \quad ۶ \quad ۶ = ۱۰۸۰$$

در نتیجه تعداد اعداد چهاررقمی که بزرگترین رقم آن‌ها برابر ۶ است برابر است با

$$۲۰۵۸ - ۱۰۸۰ = ۹۷۸$$

مسألهٔ ۵.۳.۱ مجموعهٔ $A = \{۲۳, ۲۴, \ldots, ۸۷\}$ چند عضو دارد؟

راه‌حل. فرض کنید $S = \{۱, \ldots, ۸۷\}$ و $B = \{۱, \ldots, ۲۲\}$. در این صورت $A = S - B$ و لذا

$$|A| = |S| - |B| = ۸۷ - ۲۲ = ۶۵$$

در حالت کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۶.۳.۱ فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند به‌طوری که $a \geq b$. در این صورت تعداد اعضای مجموعهٔ $\{a, a+۱, \ldots, b\}$ برابر $b - a + ۱$ است.

مسألهٔ ۷.۳.۱ چند عدد سه‌رقمی بر حداقل یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

راه‌حل. می‌دانیم در صورتی یک عدد صحیح بر هر دو عدد ۲ و ۳ بخش‌پذیر است که بر ٦ بخش‌پذیر باشد. برای محاسبهٔ تعداد اعداد سه‌رقمی که بر ٦ بخش‌پذیرند باید تعداد اعداد صحیح k را بیابیم که در نابرابری‌های

$$۱۰۰ \leq ٦k \leq ۹۹۹$$

یا معادلاً در نابرابری‌های

$$۱۷ \leq k \leq ۱٦٦$$

صدق می‌کنند. تعداد این k ها برابر ۱۵۰ است و چون کلاً ۹۰۰ عدد سه‌رقمی وجود دارد، پس $۹۰۰ - ۱۵۰ = ۷۵۰$ عدد سه‌رقمی بر حداقل یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند.

مسائل

۱) در چند کلمهٔ ۴ حرفی با حروف a، b، c، d، e، f و g حرف e وجود دارد؟

۲) در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از دو رقم ۱ و ۲ وجود دارد؟

۳) در چند عدد ٦ رقمی حداقل یک رقم فرد وجود دارد؟

۴) در چند عدد ٦ رقمی رقم تکراری وجود دارد؟

۵) چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ حداقل ۲ عضو دارند؟

٦) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ حداقل یک عدد زوج وجود دارد؟

۷) در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ حداکثر ۴ عدد فرد وجود دارد؟

۸) در چند عدد ۴ رقمی حاصل‌ضرب ارقام بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۹) چند عدد ۴ رقمی بر ٦ بخش‌پذیر نیستند؟

۱۰) چند عدد ۴ رقمی مربع کامل نیستند؟

۱۱) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳۰۰\}$ بر حداقل یکی از ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

۱۲) الف) در چند کلمهٔ ۵ حرفی با حروف انگلیسی حداقل یکی از حروف اول، دوم و سوم کلمه حرفی صدادار است؟

ب) در چندتا از این کلمات، حروف متمایزند؟

۱۳) باقی‌ماندهٔ چند عدد ۴ رقمی بر ۷ برابر ۳ است؟

۱۴) در چند عدد ۵ رقمی کوچکترین رقم برابر ۴ است؟

۱۵) در چند عدد ٦ رقمی رقم یکان با حداقل یکی از رقم‌های دهگان و صدگان برابر است؟

۱٦) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ٦۰۰\}$ بر ۲ بخش‌پذیرند ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

۱۷)* الف) به‌ازای چند زوج مرتب از اعداد طبیعی مانند (a, b) کوچکترین مضرب مشترک a و b برابر $۵^{٦} \times ۳^{۸} \times ۲^{۱۰}$ است؟

ب) به‌ازای چند سه‌تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a, b, c) کوچکترین مضرب مشترک a، b و c برابر $۷^{۴} \times ۵^{۷} \times ۳^{۱۲} \times ۲^{۱۰}$ است؟

۱۸) چند مقسوم‌علیه مثبت از عدد $۵^{۷} \times ۳^{۸} \times ۲^{۱۰}$ بر ۳۰۰ بخش‌پذیر نیستند؟

۱۹) چند مقسوم‌علیه مثبت از عدد $۵^{۹} \times ۳^{۱۲} \times ۲^{۱۰}$ مقسوم‌علیه $۵^{۷} \times ۳^{۱٦} \times ۲^{۸}$ نیستند؟

فصل ۲

جایگشت‌ها

در این فصل ابتدا نماد فاکتوریل را معرفی می‌کنیم، سپس به بررسی یکی از مهم‌ترین مسأله‌های شمارشی یعنی جایگشت‌ها می‌پردازیم و در نهایت مسألهٔ جایگشت‌های دوری را مطرح می‌کنیم.

۲—۱ فاکتوریل

در ریاضیات معرفی نمادهای کوتاه برای عبارت‌های طولانی بسیار متداول است. یکی از این نمادها که در مسائل شمارشی نیز بسیار استفاده می‌شود نماد فاکتوریل است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید n عددی طبیعی باشد. حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با $n!$ نشان می‌دهیم. در واقع

$$n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$$

همچنین تعریف می‌کنیم $۰! = ۱$.

جدول زیر مقادیر $n!$ را به‌ازای n های کوچک نشان می‌دهد.

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$n!$	۱	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰

به عنوان مثال

$$۶! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۷۲۰$$

از تعریف واضح است که اگر $n \geq ۱$، آنگاه

$$n! = n(n-۱)!$$

مسألهٔ ۲.۱.۲ ثابت کنید

$$۱۹(۱۹! + ۱۸!) = ۲۰!$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$۱۹(۱۹!+۱۸!) = ۱۹(۱۹\times ۱۸!+۱۸!) = ۱۸!\times ۱۹\times(۱۹+۱) = ۱۸!\times ۱۹\times ۲۰ = ۲۰!$$

مسألهٔ ۳.۱.۲ عبارت زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل به صورتی ساده‌تر درآورید.

$$۸ \times ۹ \times \cdots \times ۲۴$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$۸ \times ۹ \times \cdots \times ۲۴ = \frac{۱ \times ۲ \times \cdots \times ۷ \times ۸ \times \cdots \times ۲۴}{۱ \times ۲ \times \cdots \times ۷} = \frac{۲۴!}{۷!}$$

مسألهٔ ۴.۱.۲ عبارت زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل به صورتی ساده‌تر درآورید.

$$۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times ۴۰$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times ۴۰ &= (۲ \times ۱) \times (۲ \times ۲) \times (۲ \times ۳) \times \cdots \times (۲ \times ۲۰) \\ &= ۲^{۲۰} \times ۱ \times ۲ \times \cdots \times ۲۰ = ۲^{۲۰} \times ۲۰!\end{aligned}$$

مسألهٔ ۵.۱.۲ عبارت زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل به صورتی ساده‌تر درآورید.

$$۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times ۳۹$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times ۳۹ = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times ۴۰}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times ۴۰} = \frac{۴۰!}{۲^{۲۰} \times ۲۰!}$$

مسائل

۱) حساب کنید

$$۷!, \quad ۳!۴!, \quad ۳! + ۴!, \quad \frac{۸!}{۴!}$$

۲) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

$$(n - ۱)((n - ۱)! + (n - ۲)!) = n!$$

این تساوی به تجزیهٔ فاکتوریل معروف است.

۳) هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل به صورتی ساده‌تر در آورید.

الف) $۱۱ \times ۱۲ \times \cdots \times ۲۵$

ب) $۳ \times ۶ \times ۹ \times \cdots \times ۹۰$

ج) $۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times ۹۹$

د) $\text{۲۰} \times \text{۲۲} \times \text{۲۴} \times \cdots \times \text{۴۰}$

ه) $\text{۲۱} \times \text{۲۳} \times \text{۲۵} \times \cdots \times \text{۵۹}$

۴) الف) به‌ازای هر عدد طبیعی k ثابت کنید

$$(k+\text{۱})! - k! = k \cdot k!$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

$$\text{۱} \cdot \text{۱}! + \text{۲} \cdot \text{۲}! + \cdots + n \cdot n! = (n+\text{۱})! - \text{۱}$$

۵) تجزیه !۱۵ را به عوامل اول بیابید.

۶) ثابت کنید

$$\frac{\text{۲۰}!}{\text{۷}!} + \frac{\text{۱۳} \times \text{۲۰}!}{\text{۸}!} = \frac{\text{۲۱}!}{\text{۸}!}$$

۷) ثابت کنید

$$\frac{\text{۲۹}!}{\text{۹}!\text{۲۰}!} + \frac{\text{۲۹}!}{\text{۱۰}!\text{۱۹}!} = \frac{\text{۳۰}!}{\text{۱۰}!\text{۲۰}!}$$

۲—۲ جایگشت‌های خطی

به هر روش قرار گرفتن چند شیء در کنار یکدیگر یک جایگشت (خطی) از این اشیاء گفته می‌شود. مثلاً هر یک از

$$abcd, \quad bdac, \quad cbad, \quad bacd$$

جایگشتی از چهار حرف a، b، c و d است.

قضیهٔ ۱.۲.۲ تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

برهان. n مکان با شماره‌های ۱ تا n در یک ردیف در نظر می‌گیریم. عمل تشکیل یک جایگشت از n شیء داده شده را به n مرحله تجزیه می‌کنیم، مرحلهٔ اول قرار دادن یک شیء در مکان اول، ... و مرحلهٔ n ام قرار دادن یک شیء در مکان n ام. چون n شیء متمایزند، لذا مرحلهٔ اول را به n طریق، مرحلهٔ دوم را به $n - ۱$ طریق، ... و مرحلهٔ n ام را به یک طریق می‌توان انجام داد. پس طبق اصل ضرب به $n \times (n - ۱) \times \cdots \times ۱ = n!$ طریق می‌توان جایگشت را تشکیل داد.

مسألهٔ ۲.۲.۲ چند جایگشت از حروف کلمهٔ table با حرف t شروع می‌شوند؟

راه‌حل. پاسخ برابر تعداد جایگشت‌های ۴ حرف a، b، l و e، یعنی برابر !۴ است.

مسألهٔ ۳.۲.۲ چند جایگشت از حروف کلمهٔ nature به حرف صدادار ختم می‌شوند؟

راه‌حل. شش مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. چون کلمهٔ nature سه حرف صدادار دارد، پس برای حرف آخر ۳ انتخاب وجود دارد. به‌ازای هر انتخاب حرف آخر بقیهٔ مکان‌ها را به !۵ طریق می‌توانیم پر کنیم، لذا پاسخ برابر !۵ × ۳ است.

مسألهٔ ۴.۲.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm عبارت log وجود دارد؟

راه‌حل. پاسخ برابر تعداد جایگشت‌های ۷ شیء log، a، r، i، t، h و m، یعنی برابر !۷ است.

مسألهٔ ۵.۲.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle حروف صدادار مجاورند؟

راه‌حل. چون می‌خواهیم حروف صدادار مجاور باشند، آن‌ها را در یک بسته کنار یکدیگر قرار می‌دهیم.

$$\boxed{a,e,i}\,t,r,n,g,l$$

تعداد جایگشت‌های ٦ شیء فوق برابر !٦ است و به‌ازای هر یک از این جایگشت‌ها به !۳ طریق می‌توانیم حروف a، e و i را در بسته‌شان جابه‌جا کنیم. لذا پاسخ مسأله برابر !۳ × !٦ است.

مسألهٔ ٦.۲.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ talking بین دو حرف t و k دقیقاً دو حرف قرار دارد؟

راه‌حل. هفت مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به ۴ طریق می‌توانیم دو مکان انتخاب کنیم که بین آن‌ها دقیقاً دو مکان دیگر باشد. به ۲ طریق می‌توانیم حروف t و k را در این دو مکان قرار دهیم و به هر صورتی که این کار را انجام دهیم، به !۵ طریق می‌توانیم بقیهٔ حروف را در مکان‌های باقی‌مانده قرار دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر !۵ × ۲ × ۴ است.

مسألهٔ ۷.۲.۲ چهار معلم و سه دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به‌طوری‌که هیچ دو معلمی مجاور یکدیگر نباشند؟

راه‌حل. سه دانش‌آموز باید فضای خالی بین معلمین را پرکنند. لذا نحوهٔ قرار گرفتن دانش‌آموزان و معلمین به صورت زیر است (D نشان‌دهندهٔ دانش‌آموز و M نشان‌دهندهٔ معلم است).

$$MDMDMDM$$

معلمین به !۴ طریق می‌توانند در مکان‌های مشخص شده با حرف M بایستند و به‌ازای هر طریق ایستادن معلمین، دانش‌آموزان به !۳ طریق می‌توانند در بقیهٔ مکان‌ها بایستند، لذا پاسخ

مسأله برابر $!۳ \times !۴$ است.

مسألهٔ ۸.۲.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ profiles هر حرف بی‌صدا با حرفی صدادار مجاور است؟

راه‌حل. اگر در یک جایگشت هر حرف بی‌صدا با حرفی صدادار مجاور باشد، آنگاه در ابتدا و انتهای جایگشت حداکثر یک حرف بی‌صدا و بین حروف صدادار متوالی در جایگشت حداکثر دو حرف بی‌صدا وجود دارد. چون کلمهٔ داده شده سه حرف صدادار دارد، لذا برای تشکیل جایگشتی با ویژگی‌های گفته شده باید حروف صدادار را در مکان‌های نشان داده شده با علامت x و حروف بی‌صدا را در مکان‌های نشان داده شده با علامت y در

$$yxyyxyyxy$$

قرار دهیم. چون کلمه داده شده پنج حرف بی‌صدا دارد، لذا جایگشت‌های مورد نظر به یکی از ۴ صورت زیر هستند.

$$yxyyxyyx, \quad yxyyxyxy, \quad yxyxyyxy, \quad xyyxyyxy$$

پس پاسخ مسأله برابر $!۵ \times !۳ \times ۴$ است.

مسألهٔ ۹.۲.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ flexicam در سمت راست هر یک از حروف x و c و چسبیده به آن‌ها حرفی صدادار قرار دارد؟

راه‌حل. ابتدا حروف غیر از x و c را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !٦ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس حروف x و c را بین بقیهٔ حروف قرار می‌دهیم طوری که هر یک در سمت چپ حرفی صدادار قرار گیرند. برای این دو حرف به ترتیب ۳ و ۲ انتخاب وجود دارد. لذا پاسخ برابر $۲ \times ۳ \times !٦$ است.

مسألهٔ ۱۰.۲.۲ در چند جایگشت ار حروف کلمهٔ mailbox حروف m و a مجاورند ولی حروف b و x مجاور نیستند؟

راه‌حل. تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمهٔ mailbox که در آن‌ها حروف m و a مجاورند برابر !۲ × !٦ است.

$$\mathbf{m,a},\mathbf{i},\mathbf{l},\mathbf{b},\mathbf{o},\mathbf{x}$$

و تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها هم m و a مجاور باشند و هم b و x، برابر !۲ × !۲ × !۵ است.

$$\mathbf{m,a},\mathbf{b,x},\mathbf{i},\mathbf{l},\mathbf{o}$$

پس پاسخ مسأله برابر است با

$$6! \times 2! - 5! \times 2! \times 2! = 960$$

مسائل

۱) الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت حرف پنجم n است؟

ج) در چند جایگشت حرف چهارم صدادار است؟

د) در چند جایگشت حرف اول بی‌صدا و حرف آخر صدادار است؟

ه) در چند جایگشت بین حروف t و n دقیقاً سه حرف قرار دارد؟

و) در چند جایگشت عبارت tri وجود دارد؟

ز) در چند جایگشت عبارت‌های tr و gl وجود دارند؟

۲) پنج جفت دستکش متمایز در اختیار داریم. به چند طریق می‌توانیم این دستکش‌ها را بین ۵ نفر تقسیم کنیم به‌طوری‌که به هر نفر یک دستکش چپ و یک دستکش راست برسد؟

۳) ۷ مرد و ۷ زن به چند طریق می‌توانند تشکیل ۷ زوج (زن و شوهر) بدهند؟

۴) الف) ٦ دکتر و ۵ مهندس به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند؟

ب) در چند حالت دکترها مجاور یکدیگرند؟

ج) در چند حالت هیچ دو دکتری مجاور یکدیگر نیستند؟

د) در چند حالت هم دکترها مجاور یکدیگرند و هم مهندسین؟

۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mobile هیچ دو حرف صدادار و هیچ دو حرف بی‌صدا مجاور نیستند؟

٦) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm هر حرف بی‌صدا با حرفی صدادار مجاور است؟

۷) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ table هر حرف بی‌صدا با حرفی صدادار مجاور است؟

۸) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle هر یک از حروف t و g با دو حرف صدادار مجاورند؟

۹) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mobile در سمت راست m و چسبیده به آن حرفی صدادار قرار دارد؟

۱۰) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle در سمت راست هر یک از حروف r و a و چسبیده به آن‌ها حرفی صدادار قرار دارد؟

۱۱) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle حروف صدادار مجاور و حروف r و g غیرمجاورند؟

۱۲) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle حروف صدادار مجاور و حروف r و e غیرمجاورند؟

۱۳) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ universal هر یک از حروف n و s با دو حرف صدادار مجاورند؟

۱۴)* در چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰ هر عدد (غیر از اولین عدد) با حداقل یکی از اعداد واقع در سمت چپ خود یک واحد اختلاف دارد؟

۱۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm عبارت log وجود دارد ولی عبارت mir وجود ندارد؟

۱۶) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ universal حرف a با s مجاور و با n غیرمجاور است؟

۱۷) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle بین هر دو حرف صدادار حداقل دو حرف بی‌صدا قرار دارد؟

۱۸) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm بین حروف r و t دقیقاً سه حرف قرار دارد و در ضمن حروف r و a مجاورند؟

۱۹) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ universal بین حروف u و i و همچنین بین حروف e و a دقیقاً یک حرف قرار دارد؟

۲—۳ جایگشت‌های r شیء از n شیء

به هر روش قرار گرفتن r شیء از n شیء داده شده یک جایگشت r شیء از این n شیء گفته می‌شود. مثلاً هر یک از

$$abc, \quad bea, \quad cad, \quad ebd, \quad ced$$

یک جایگشت ۳ حرف از ۵ حرف a، b، c، d و e است.

تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم. با توجه به آن‌چه در بخش قبل گفتیم، $P(n,n)=n!$.

قضیهٔ ۱.۳.۲ فرض کنید $1 \le r \le n$. در این صورت

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

برهان. n شیء متمایز و r مکان در یک ردیف در نظر بگیرید. عمل تشکیل یک جایگشت r شیء از این n شیء را به r مرحله تجزیه می‌کنیم، ابتدا قرار دادن یک شیء در مکان اول، سپس قرار دادن یک شیء در مکان دوم، ... و در نهایت قرار دادن یک شیء در مکان r ام. به n طریق می‌توانیم یک شیء را در مکان اول قرار دهیم. مستقل از نحوهٔ قرار دادن یک شیء در مکان اول، به $n-1$ طریق می‌توانیم یک شیء را در مکان دوم قرار دهیم، ... و مستقل از نحوهٔ قرار دادن یک شیء در هر یک از مکان‌های اول، دوم، ... و $(r-1)$ ام به $n-(r-1)$ طریق می‌توانیم یک شیء را در مکان r ام قرار دهیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب،

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n(n-1)\cdots(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

توجه کنید که $P(n,r)$ در واقع برابر تعداد راه‌های انتخاب مرتب r شیء از n شیء متمایز است (یعنی r شیء به ترتیب انتخاب شوند، ابتدا یک شیء انتخاب شود، سپس یک شیء دیگر و ...).

مسألهٔ ۲.۳.۲ چند جایگشت ۵ حرفی از حروف کلمهٔ triangle با حرف بی‌صدا شروع می‌شوند؟

راه‌حل. چون triangle، پنج حرف بی‌صدا دارد، لذا برای حرف اول جایگشت ۵ انتخاب وجود دارد. چهار حرف دیگر جایگشت باید از ۷ حرف باقی‌مانده از حروف کلمهٔ triangle انتخاب شوند، لذا برای این ۴ حرف $P(7,4)$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ مسأله برابر $5P(7,4)$ است.

مسألهٔ ۳.۳.۲ در چند جایگشت چهار حرفی از حروف کلمهٔ profile حرف f وجود دارد؟

راه‌حل اول. تعداد کل جایگشت‌های ۴ حرفی برابر $P(۷,۴)$ و تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی که حرف f را ندارند برابر $P(٦,۴)$ است، لذا پاسخ مسأله برابر $P(۷,۴) - P(٦,۴)$ است.

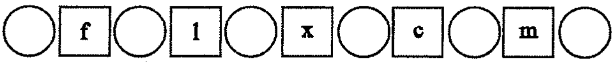
راه‌حل دوم. چهار مکان در یک ردیف در نظر بگیرید. در یکی از این مکان‌ها باید حرف f را قرار دهیم، لذا برای حرف f، ۴ انتخاب وجود دارد. برای سه حرف باقی‌ماندهٔ جایگشت نیز $P(٦,۳)$ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ مسأله برابر $۴P(٦,۳)$ است.

مسألهٔ ۴.۳.۲ در چند عدد ٦ رقمی با رقم‌های متمایز، رقم‌های اول، دوم و سوم (از سمت چپ) فردند؟

راه‌حل. سه رقم اول جایگشتی ۳ رقمی از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ است، لذا برای آن $P(۵,۳)$ انتخاب وجود دارد و سه رقم باقی‌مانده جایگشتی ۳ رقمی از ۷ رقم باقی‌مانده است، لذا برای آن $P(۷,۳)$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ مسأله برابر $P(۵,۳)P(۷,۳)$ است.

مسألهٔ ۵.۳.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ flexicam هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

راه‌حل. ابتدا حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !۵ طریق می‌توان انجام داد. سپس حروف صدادار را در ۳ مکان از ٦ مکان ایجاد شده بین ۵ حرف صدادار قرار می‌دهیم. این کار را به $P(٦,۳)$ طریق می‌توان انجام داد.



پس پاسخ مسأله برابر $۵!P(٦,۳)$ است.

مسألهٔ ٦.۳.۲ به چند طریق می‌توان ۴ کتاب فیزیک متمایز و ۵ کتاب ریاضی متمایز را بین

۷ زن و ۵ مرد توزیع کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد و در ضمن به هیچ مردی کتاب فیزیک نرسد؟

راه‌حل. ۴ کتاب فیزیک را باید بین ۴ زن از ۷ زن تقسیم کنیم. این کار را به $P(۷,۴)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس ۵ کتاب ریاضی را باید بین ۵ نفر از ۸ نفر باقی‌مانده تقسیم کنیم. این کار را به $P(۸,۵)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $P(۷,۴)P(۸,۵)$ است.

مسألهٔ ۷.۳.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mailbox حروف صدادار به ترتیب الفبایی آمده‌اند؟ (مثلاً خود کلمهٔ mailbox این ویژگی را دارد، ابتدا حرف a آمده، سپس i و در نهایت o.)

راه‌حل. هفت مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا ۴ حرف بی‌صدا را در چهارتا از این ۷ مکان قرار می‌دهیم. این کار را به $P(۷,۴)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال سه حرف صدادار را باید به ترتیب الفبایی در سه مکان باقی‌مانده قرار دهیم. این کار را به یک طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $P(۷,۴)$ است.

مسألهٔ ۸.۳.۲ در چند جایگشت ٦ حرفی از حروف کلمهٔ triangle هر سه حرف صدادار وجود دارند؟

راه‌حل. شش مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا سه حرف صدادار را در ۳ مکان از این ٦ مکان قرار می‌دهیم. این کار را به $P(٦,۳)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس در ۳ مکان باقی‌مانده سه حرف بی‌صدا از ۵ حرف بی‌صدا را قرار می‌دهیم. این کار را به $P(۵,۳)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $P(٦,۳)P(۵,۳)$ است.

مسألهٔ ۹.۳.۲ به چند طریق می‌توان ۵ مهرهٔ رخ متمایز را در ۵ خانه از صفحهٔ شطرنجی

۸×۸ قرار داد طوری که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند؟

راه‌حل. ۵ رخ را باید در ۵ سطر متمایز و ۵ ستون متمایز قرار دهیم. ابتدا ۵ سطر از ۸ سطر را به ترتیب برای رخ‌ها انتخاب می‌کنیم. این کار را به $P(۸,۵)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس ۵ ستون را به ترتیب انتخاب می‌کنیم، رخ اول را در محل تقاطع اولین سطر و اولین ستون انتخاب شده قرار می‌دهیم، ... و رخ پنجم را نیز در محل تقاطع پنجمین سطر و پنجمین ستون انتخاب شده قرار می‌دهیم. این کار را نیز به $P(۸,۵)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $P(۸,۵)^۲$ است.

مسألهٔ ۱۰.۳.۲ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ computer دو حرف صدادار مجاور وجود دارد ولی سه حرف صدادار مجاور وجود ندارد؟

راه‌حل. ابتدا ۳ حرف صدادار را به ۲ بستهٔ تکی و دوتایی مرتب تقسیم می‌کنیم. برای بسته تکی ۳ انتخاب وجود دارد و دو حرف باقی‌مانده را به ۲ طریق می‌توانیم در بسته دوتایی قرار دهیم.

حال حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $۵!$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. در نهایت دو بستهٔ حروف صدادار را در دو مکان از شش مکان ایجاد شده بین حروف صدادار قرار می‌دهیم. این کار را به $P(۶,۲)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $P(۶,۲) \times ۵! \times ۲ \times ۳$ است.

مسائل

۱) الف) چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمهٔ logarithm وجود دارد؟

ب) چند جایگشت ٦ حرفی با حرف t شروع می‌شوند؟

ج) چند جایگشت ٦ حرفی با حرف بی‌صدا شروع می‌شوند؟

د) در چند جایگشت ٦ حرفی حرف t وجود دارد؟

هـ) در چند جایگشت ٦ حرفی حروف اول و آخر بی‌صدا هستند؟

و) در چند جایگشت ٦ حرفی حداقل یکی از حروف صدادار وجود دارند؟

ز) در چند جایگشت ٦ حرفی هر سه حرف صدادار وجود دارند؟

۲) الف) ۱۰ صندلی در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق ۱۰ نفر از ۱۵ نفر می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند؟
ب) ۱۵ صندلی در یک ردیف قرار دارند. ۱۰ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۱۰ تا از این صندلی‌ها بنشینند؟

۳) در یک سالن دو ردیف صندلی، هر ردیف شامل ۸ صندلی، وجود دارد. ۵ معلم، ۴ دکتر و ۳ مهندس به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به‌طوری‌که معلمین در ردیف جلو و دکترها در ردیف عقب قرار گیرند؟

۴) ۱۱ مرد و ۱۴ زن به چند طریق می‌توانند تشکیل ۱۱ زوج بدهند؟

۵) به چند طریق می‌توان ۹ کتاب متمایز را بین ۱۵ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

٦) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

۷) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mailbox حداقل دو حرف صدادار مجاورند؟

۸) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm دو حرف صدادار مجاور وجود دارد ولی سه حرف صدادار مجاور وجود ندارد؟

۹) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ computer حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار دارند؟

۱۰) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle حرف t قبل از حرف n قرار دارد؟

۱۱)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند و در ضمن حرف g قبل از حرف r قرار دارد؟

۱۲)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ computer بین حروف p و r دقیقاً سه حرف دیگر قرار دارد و در ضمن m و o مجاورند؟

۱۳) در چند جایگشت ٦ حرفی از حروف کلمهٔ logarithm عبارت log وجود دارد؟

۱۴)* در چند عدد ۷ رقمی با ارقام متمایز ارقام ۰، ۱ و ۲ وجود دارد و این سه رقم دو به دو غیرمجاورند؟

۱۵) در چند جایگشت $a_1a_2\ldots a_9$ از ارقام ۱، ۲، ... و ۹، $a_1 < a_2 < a_3$؟

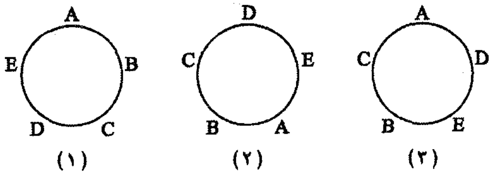
۱٦)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند و در ضمن حروف r و g نیز مجاور نیستند؟

۱۷)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ computer بین حروف p و t دقیقاً یک حرف قرار دارد و هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

۲ــ۴ جایگشت‌های دوری

به هر روش قرار گرفتن n شیء دور یک دایره یک جایگشت دوری از این n شیء گفته می‌شود، با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران آرایش دیگری به‌دست آید، آنگاه این دو آرایش را هم‌ارز می‌گیریم.

مثلاً آرایش‌های ۱ و ۲ در شکل زیر هم‌ارزند ولی این دو با آرایش ۳ هم‌ارز نیستند. لذا آرایش‌های ۱ و ۲ یک جایگشت دوری از ۵ حرف A، B، C، D و E هستند.

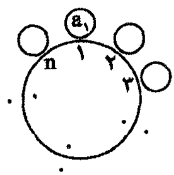


آن‌چه در جایگشت‌های دوری اهمیت دارد موقعیت اشیاء نسبت به یکدیگر است و نه جایی که هر شیء در آن قرار گرفته است.

قضیهٔ ۱.۴.۲ تعداد جایگشت‌های دوری n شیء متمایز برابر $(n-1)!$ است.

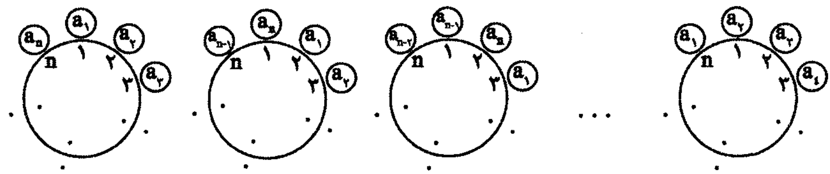
برهان.

روش اول. فرض کنید نام این n شیء a_1، a_2، ... و a_n باشد. n مکان دور یک دایره با شماره‌های ۱ تا n در نظر بگیرید. یک آرایش از این n شیء دور دایره در نظر بگیرید. این آرایش را آن‌قدر دوران می‌دهیم تا a_1 به مکان شمارهٔ ۱ منتقل شود. پس برای هر آرایش n شیء دور دایره آرایشی منحصربفرد هم‌ارز با آن وجود دارد که a_1 در مکان شمارهٔ ۱ قرار دارد. پس برای شمارش جایگشت‌های دوری n شیء کافی است تعداد این آرایش‌ها را بیابیم. تعداد این آرایش‌ها نیز برابر تعداد راه‌های قرار دادن $n-1$ شیء a_2، a_3، ... و a_n در مکان‌های ۲ تا n، یعنی برابر $(n-1)!$ است.



روش دوم. n مکان با شماره‌های ۱ تا n دور یک دایره در نظر بگیرید. تعداد راه‌های قراردادن n شیء در این n مکان برابر $n!$ است. به‌ازای هر یک از این آرایش‌ها، آرایش‌هایی که از دوران این آرایش به‌دست می‌آیند دوبه‌دو هم‌ارزند. چون تعداد اشیاء برابر n است، پس هر

آرایش با $n - ۱$ آرایش دیگر هم‌ارز است (شکل زیر را ملاحظه کنید). در نتیجه $n!$ آرایش را می‌توانیم به دسته‌های n تایی تقسیم کنیم به‌طوری‌که آرایش‌های هر دسته متناظر با یک جایگشت دوری باشند. پس تعداد جایگشت‌های دوری برابر $\frac{n!}{n} = (n - ۱)!$ است.

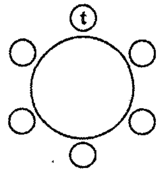


مسألۀ ۲.۴.۲ در چند جایگشت دوری از حروف کلمۀ triangle حروف صدادار مجاورند؟

راه‌حل. حروف صدادار را در یک بسته قرار می‌دهیم.

$$\mathbf{t, r, n, g, l, a, e, i}$$

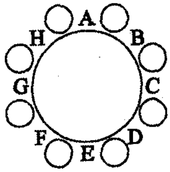
یک دایره در نظر می‌گیریم و حرف t را در نقطه‌ای ثابت دور دایره قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های بقیۀ حروف برابر $۵! \times ۳!$ است.



مسألۀ ۳.۴.۲ سه معلم و هشت دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند به‌طوری‌که هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نباشند؟

راه‌حل. یکی از دانش‌آموزان مانند A را در نظر می‌گیریم و او را در نقطه‌ای ثابت دور میز قرار می‌دهیم. بقیۀ دانش‌آموزان را به $۷!$ طریق می‌توانیم دور میز قرار دهیم. حال ۳ معلم را باید در ۳ مکان از ۸ مکان ایجاد شده بین دانش‌آموزان قرار دهیم. این کار را به $P(۸, ۳)$ طریق

می‌توانیم انجام دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $P(۸, ۳)۷!$ است.

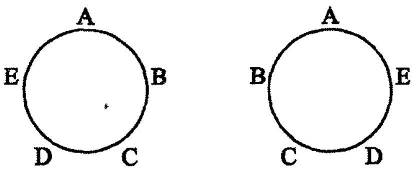


مسألهٔ ۴.۴.۲ به چند طریق ۷ نفر از بین ۱۰ نفر می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

راه‌حل. دور یک دایره ۷ مکان با شماره‌های ۱ تا ۷ در نظر می‌گیریم. به $P(۱۰, ۷)$ طریق می‌توان ۷ نفر از این ۱۰ نفر را در این ۷ مکان قرار داد. هر جایگشت دوری شامل ۷ نفر از ۱۰ نفر متناظر با ۷ تا از این $P(۱۰, ۷)$ آرایش است. لذا پاسخ مسأله برابر $\frac{۱}{۷}P(۱۰, ۷)$ است.

مسألهٔ ۵.۴.۲ با ۵ مهرهٔ کروی شکل به رنگ‌های مختلف به چند طریق می‌توان یک گردن‌بند ساخت؟

راه‌حل. در این مسأله علاوه بر دوران، عمل برگرداندن گردن‌بند نیز آرایش جدیدی تولید نمی‌کند. مثلاً آرایش‌های شکل زیر در واقع یک گردن‌بند را مشخص می‌کنند.



برای حل این مسأله همانند قبل جای یکی از مهره‌ها، مثلاً A، را دور یک دایره ثابت در نظر می‌گیریم. بقیه مهره‌ها را به !۴ طریق می‌توانیم دور دایره قرار دهیم. با توجه به نکته‌ای که گفتیم این !۴ آرایش به دسته‌های دوتایی تقسیم می‌شوند طوری‌که آرایش‌های هر دسته متناظر با یک گردن‌بند می‌باشند. در نتیجه تعداد گردن‌بندها برابر $\frac{۴!}{۲}$ است.

مسألهٔ ۶.۴.۲ چند تاس مختلف با اعداد ۱ تا ۶ وجود دارد؟

راه‌حل. توجه کنید دو تاس یکسانند اگر بتوان آن‌ها را طوری روی زمین قرار داد که وضعیت هر عدد در هر دو تاس همانند هم باشد. حال یک مکعب در نظر بگیرید. عدد ۱ را روی هر وجه این مکعب بنویسیم می‌توانیم مکعب را روی این وجه بر زمین بگذاریم. برای وجه مقابل این وجه ۵ انتخاب وجود دارد. اکنون ۴ عدد باقی‌مانده را باید روی چهار وجه کناری بنویسیم. تعداد روش‌های این کار برابر تعداد جایگشت‌های دوری ۴ عدد باقی‌مانده است. پس برای ۴ وجه باقی‌مانده !۳ انتخاب وجود دارد. لذا پاسخ مسأله برابر $5 \times 3! = 30$ است.

مسائل

۱) الف) ۴ معلم و ۹ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

ب) در چند حالت معلمین کنار یکدیگر قرار دارند؟

ج) در چند حالت هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نیستند؟

د) در چند حالت بین هر دو معلم حداقل دو دانش‌آموز قرار دارد؟

۲) الف) چند جایگشت دوری شامل ٦ حرف از حروف کلمهٔ logarithm وجود دارد؟

ب) در چندتا از این جایگشت‌ها حرف t وجود دارد؟

ج) در چندتا هر سه حرف صدادار وجود دارند؟

د) در چندتا حداقل یکی از حروف t و m وجود دارند؟

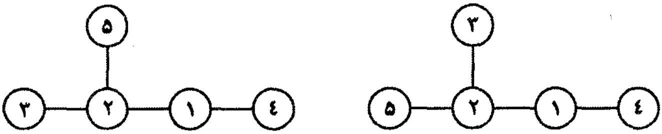
۳) ۵ زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند به‌طوری‌که هر فرد کنار همسر خود باشد؟

۴) الف) در چند جایگشت دوری از حروف کلمهٔ triangle بین حروف n و r دقیقاً دو حرف دیگر قرار دارد؟

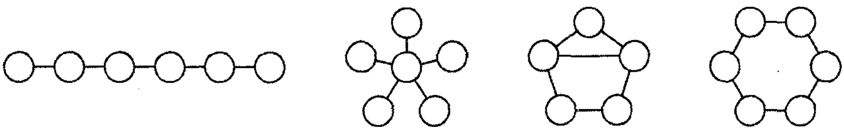
ب) در چند جایگشت دوری بین حروف n و r دقیقاً سه حرف دیگر قرار دارد؟

۵) در چند تاس با اعداد ۱ تا ٦ مجموع اعداد وجه‌های مقابل برابر ۷ است؟

٦)* یک شکل در نظر بگیرید که از n دایره تشکیل شده باشد و بین برخی از دایره‌ها پاره‌خطی رسم شده باشد. می‌خواهیم در دایره‌های این شکل برچسب‌های ۱ تا n را بنویسیم به‌طوری‌که اعداد واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند. دو روش برچسب‌گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو عدد وجود داشته باشند که دایره‌های شامل این دو عدد در یکی مجاور و در دیگری غیرمجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هرگاه بین آن‌ها پاره‌خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب‌گذاری‌های زیر یکسانند.



برای هر یک از شکل‌های زیر تعداد راه‌های برچسب‌گذاری را بیابید.



فصل ۳

ترکیب‌ها و بسط دوجمله‌ای

در این فصل ابتدا به بررسی مفهوم ترکیب می‌پردازیم، سپس قضیهٔ دوجمله‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم.

۳—۱ ترکیب‌ها

به هر انتخاب (غیرمرتب) r شیء از n شیء داده شده یک ترکیب r شیء از این n شیء گفته می‌شود. مثلاً هر یک از

$$\{a, b, c\}, \quad \{a, b, d\}, \quad \{b, d, e\}, \quad \{a, c, e\}$$

یک ترکیب ۳ حرف از ۵ حرف a، b، c، d و e است. توجه کنید که در ترکیب، ترتیب اهمیتی ندارد. مثلاً ترکیب‌های $\{a, b, c\}$ و $\{a, c, b\}$ با هم فرقی ندارند.

تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء متمایز را با نماد $\binom{n}{r}$ یا $C(n, r)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید $\binom{n}{r}$ در واقع برابر تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی است.

فرض کنید A مجموعه‌ای n عضوی باشد. چون مجموعه‌های $\emptyset$ و A به ترتیب تنها زیرمجموعه‌های صفر عضوی و n عضوی A هستند، لذا $1 = \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$. همچنین A، n

زیرمجموعهٔ یک عضوی دارد، پس $n = \binom{n}{1}$. اگر B زیرمجموعه‌ای r عضوی از A باشد، آنگاه متمم B نسبت به A زیرمجموعه‌ای $n-r$ عضوی از A است. از این مطلب نتیجه می‌گیریم تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی A برابر است، لذا $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

برای به‌دست آوردن فرمول $\binom{n}{r}$ از فرمول $P(n,r)$ که در فصل قبل به‌دست آوردیم استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۱.۳ اگر $0 \le r \le n$، آنگاه

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

برهان. تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز از یک سو برابر $P(n,r)$ و از سوی دیگر برابر $\binom{n}{r} \times r!$ است زیرا برای تشکیل یک جایگشت r شیء از n شیء ابتدا r تا از n شیء را انتخاب می‌کنیم و سپس r شیء انتخاب شده را در یک ردیف کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. عمل انتخاب به $\binom{n}{r}$ طریق و عمل قرار دادن r شیء کنار یکدیگر به $r!$ طریق قابل انجام است. در نتیجه

$$\binom{n}{r} \times r! = P(n,r)$$

و لذا

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مسألهٔ ۲.۱.۳ از میان ۷ مرد و ٦ زن به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره متشکل از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل داد؟

راه‌حل. به $\binom{7}{3}$ طریق می‌توان ۳ تا از ۷ مرد را انتخاب کرد و به‌ازای هر چنین انتخابی به $\binom{6}{2}$ طریق می‌توان ۲ تا از ٦ زن را انتخاب کرد. پس پاسخ مسأله برابر $\binom{7}{3}\binom{6}{2}$ است. ⋮

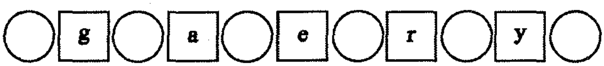
مسألهٔ ۳.۱.۳ در چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از مجموعهٔ $\{۱,\dots,۱۰\}$ حداقل سه عدد فرد وجود دارد؟

راه‌حل. زیرمجموعه‌های ۵ عضوی را که حداقل سه عدد فرد دارند به سه دسته تقسیم می‌کنیم. در دستهٔ اول، دوم و سوم زیرمجموعه‌هایی را قرار می‌دهیم که به ترتیب ۳، ۴ و ۵ عدد فرد دارند. تعداد زیرمجموعه‌هایی که در این دسته‌ها قرار دارند به ترتیب برابر $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۲}$، $\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۱}$ و $\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۰}$ است. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۰}=۱۲۶$$

مسألهٔ ۴.۱.۳ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ gallery حروف l غیرمجاورند؟

راه‌حل. ابتدا همهٔ حروف غیر از دو حرف l را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !۵ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس دو حرف l را در دو مکان از شش مکان ایجاد شده بین بقیهٔ حروف قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $!۵ \times \binom{۶}{۲}$ است.



مسألهٔ ۵.۱.۳ در یک جمع ۹ زوج (زن و شوهر) حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر از این جمع انتخاب کرد طوری که در بین آن‌ها دقیقاً ۳ زوج حضور داشته باشند؟

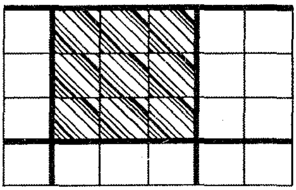
راه‌حل. ابتدا ۳ زوج از ۹ زوج را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۹}{۳}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. ۴ نفر دیگر را باید از ۶ زوج باقی‌مانده انتخاب کنیم. در ضمن این ۴ نفر باید از ۴ زوج مختلف انتخاب شوند. لذا ابتدا ۴ زوج انتخاب می‌کنیم و سپس از هر یک از این ۴ زوج یک نفر را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۶}{۴} \times ۲^{۴}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{۹}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۲^{۴}$ است.

مسألهٔ ۶.۱.۳ در یک کلاس ۳۰ دانش‌آموز با قدهای مختلف حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۶ نفر از این کلاس را برای تیم والیبال و ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد طوری که هر عضو تیم والیبال از هر عضو تیم فوتبال بلندتر باشد؟

راه‌حل. اعضای تیم والیبال و فوتبال در مجموع ۱۴ نفرند. ابتدا ۱۴ نفر را از کلاس انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۳۰}{۱۴}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. به هر صورتی که این ۱۴ نفر انتخاب شوند، تیم‌های والیبال و فوتبال را فقط به یک طریق می‌توان تشکیل داد زیرا در بین این ۱۴ نفر آن ۶ نفری را که قد بلندتری دارند باید در تیم والیبال و ۸ نفر باقی‌مانده را باید در تیم فوتبال قرار دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{۳۰}{۱۴}$ است.

مسألهٔ ۷.۱.۳ در یک صفحهٔ شطرنجی ۶×۴ چند مستطیل دیده می‌شود؟

راه‌حل. هر مستطیل از محل برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی حاصل می‌شود. پس تعداد مستطیل‌ها برابر تعداد راه‌های انتخاب دو خط افقی و دو خط عمودی است. لذا در صفحهٔ شطرنجی ۶×۴، $\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}$ مستطیل دیده می‌شود.



مسألهٔ ۸.۱.۳ در چند عدد ۸ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دقیقاً ۵ رقم فرد وجود دارد؟

راه‌حل. ۸ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. در ۵ تا از این مکان‌ها باید رقم فرد و در ۳ تای دیگر باید رقم زوج قرار دهیم. لذا ابتدا ۵ تا از ۸ مکان را انتخاب می‌کنیم، سپس در هر یک از این ۵ مکان یکی از ارقام ۱، ۳ و ۵ را قرار می‌دهیم و در هر یک از ۳ مکان باقی‌مانده یکی از ارقام ۲ و ۴ را قرار می‌دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $۲^۳ \times ۳^۵ \times \binom{۸}{۵}$ است.

مسألهٔ ۹.۱.۳ در چند جایگشت ٦ حرفی از حروف کلمهٔ logarithm دقیقاً دو حرف صدادار وجود دارد؟

راه‌حل. ابتدا ۲ حرف از ۳ حرف صدادار و ۴ حرف از ٦ حرف بی‌صدا را انتخاب می‌کنیم، سپس حروف انتخاب شده را در یک ردیف کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{۳}{۲}\binom{٦}{۴} \times ٦!$ است.

مسألهٔ ۱۰.۱.۳ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ computers حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار دارند و همچنین حرف p جلوتر از حرف c قرار دارد؟

راه‌حل. ۹ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا ۳ تا از ۹ مکان را انتخاب می‌کنیم و حروف صدادار را به ترتیب الفبایی در این ۳ مکان قرار می‌دهیم. سپس ۲ تا از ٦ مکان باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و حروف p و c را طوری در این دو مکان قرار می‌دهیم که p جلوتر از c قرار گیرد و در نهایت ۴ حرف باقی‌مانده را در ۴ مکان دیگر قرار می‌دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $\binom{۹}{۳}\binom{٦}{۲} \times ۴!$ است.

مسألهٔ ۱۱.۱.۳ در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف a، b و c، سومین حرف a در مکان هفتم کلمه آمده است؟

راه‌حل. ۱۰ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. در مکان هفتم و در ۲ مکان از ٦ مکان اول باید حرف a قرار دهیم، در هر یک از ۴ مکان باقی‌مانده از ٦ مکان اول باید یکی از حروف b و c را قرار دهیم و در هر یک از مکان‌های هشتم تا دهم باید یکی از حروف a، b و c را قرار دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $\binom{٦}{۲} \times ۲^۴ \times ۳^۳$ است.

۲	a	۲	۲	a	۲	a	۳	۳	۳
۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰

مسألهٔ ۱۲.۱.۳ ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره با نام‌های A و B

تقسیم کرد؟

راه‌حل. تیم A را به $\binom{10}{5}$ طریق می‌توان انتخاب کرد و پس از آن تیم B به صورت منحصربفرد مشخص می‌شود. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{10}{5}$ است.

مسألهٔ ۱۳.۱.۳ ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

راه‌حل اول. به هر صورتی که ۱۰ نفر را به دو تیم ۵ نفره تقسیم کنیم به ۲ طریق می‌توانیم نام‌های A و B را روی این دو تیم بگذاریم. لذا پاسخ مسأله قبل دو برابر پاسخ این مسأله است. پس پاسخ این مسأله برابر $\frac{1}{2}\binom{10}{5}$ است.

راه‌حل دوم. یکی از این ۱۰ نفر، مثلاً X را در نظر بگیرید. X به $\binom{9}{4}$ طریق می‌تواند اعضای تیم خود را انتخاب کند و تیم مقابل به صورت منحصربفرد مشخص می‌شود. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{9}{4}$ است.

مسألهٔ ۱۴.۱.۳ ۵ مهرهٔ رخ یکسان را به چند طریق می‌توان در ۵ خانه از یک صفحهٔ شطرنجی 8×8 قرارداد به‌طوری‌که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند؟

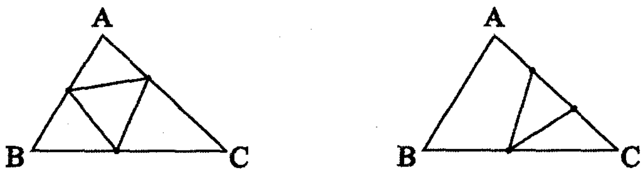
راه‌حل. ۵ مهرهٔ رخ باید در ۵ سطر مختلف و ۵ ستون مختلف قرار گیرند. لذا ابتدا ۵ سطر و ۵ ستون از صفحهٔ شطرنجی انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{8}{5} \times \binom{8}{5}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس مهره‌های رخ را باید در ۵ خانه از خانه‌هایی که در محل تقاطع ۵ سطر و ۵ ستون انتخاب شده قرار دارند قرار دهیم به صورتی که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند. این کار را نیز به $5!$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر $5! \times \binom{8}{5}^2$ است.

مسألهٔ ۱۵.۱.۳ به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به ۷ اتاق متمایز تقسیم کرد طوری که در هر اتاق حداقل یک نفر قرار گیرد؟

راه‌حل. در یک اتاق باید دو نفر قرار گیرند و در هر یک از اتاق‌های دیگر یک نفر باید قرار گیرد. لذا ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و این دو نفر را در یکی از اتاق‌ها قرار می‌دهیم. این کار را به $۷ \times \binom{۸}{۲}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال ۶ نفر باقی‌مانده را به $!۶$ طریق می‌توانیم به ۶ اتاق دیگر تقسیم کنیم. لذا پاسخ مسأله برابر $!۷ \times \binom{۸}{۲}$ است.

مسألهٔ ۱۶.۱.۳ روی هر ضلع مثلث ABC، ۵ نقطه را علامت گذاشته‌ایم. چند مثلث وجود دارد که رأس‌های هر یک متعلق به این ۱۵ نقطه باشد؟

راه‌حل. مثلث‌هایی که رأس‌های آن‌ها متعلق به این ۱۵ نقطه باشند به دو صورت‌اند. یک دسته شامل مثلث‌هایی است که سه رأس آن‌ها روی سه ضلع مختلف از مثلث ABC قرار دارند و دستهٔ دیگر شامل مثلث‌هایی است که سه رأس آن‌ها روی دو ضلع مختلف از مثلث ABC قرار دارند.



تعداد مثلث‌های دستهٔ اول برابر $۵^۳$ است زیرا باید از هر ضلع مثلث ABC یکی از ۵ نقطه‌اش را انتخاب کنیم و تعداد مثلث‌های دستهٔ دوم برابر $۵ \times ۲ \times \binom{۵}{۲} \times ۳$ است زیرا باید ابتدا یک ضلع از مثلث ABC و بعد دو نقطه از ۵ نقطهٔ روی این ضلع را انتخاب کنیم، سپس یک ضلع دیگر از مثلث ABC و یکی از ۵ نقطه‌اش را باید انتخاب کنیم. پس پاسخ مسأله برابر $۵^۳ + ۳۰\binom{۵}{۲} = ۴۲۵$ است.

مسألهٔ ۱۷.۱.۳ در چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \ldots, ۱۱\}$ هیچ دو عضوی متوالی نیستند؟

راه‌حل. به هر زیرمجموعه از X مانند A می‌توانیم کدی ۱۱ رقمی با ارقام صفر و یک متناظر

کنیم به این صورت که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۱۱$، اگر i عضوی از A باشد رقم i ام کد را برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر می‌گیریم. مثلاً کد متناظر با $A = \{۱, ۵, ۹, ۱۰\}$ برابر ۱۰۰۰۱۰۰۰۱۱۰ و کد متناظر با $A = \{۲, ۷, ۱۱\}$ برابر ۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۱ است. حال زیرمجموعه‌های ۴ عضوی X که هیچ دو عضو آن‌ها متوالی نیستند متناظر با کدهایی هستند که دقیقاً ۴ رقم آن‌ها برابر یک است و هیچ دو رقم یک در آن‌ها مجاور نیستند. برای شمارش این کدها ابتدا ۷ رقم صفر در یک ردیف قرار می‌دهیم و سپس در ۴ مکان از ۸ مکان ایجاد شده بین صفرها رقم یک قرار می‌دهیم. پس تعداد این کدها و در نتیجه پاسخ مسأله برابر $\binom{۸}{۴}$ است.

○ ∘ ○ ∘ ○ ∘ ○ ∘ ○ ∘ ○ ∘ ○ ∘ ○

در حالت کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۱۸.۱.۳ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که هیچ دو عضو متوالی ندارند برابر $\binom{n-r+۱}{r}$ است.

مسألهٔ ۱۹.۱.۳ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند؟ (به هر دنباله به صورت

$$a, a + d, a + ۲d, a + ۳d, \ldots$$

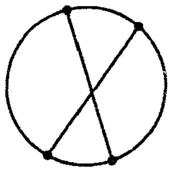
یک تصاعد حسابی گفته می‌شود.)

راه‌حل. باید تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی X را که به صورت $\{a, a + d, a + ۲d\}$ هستند بیابیم. توجه کنید که اگر کوچکترین و بزرگترین عضو هر یک از این زیرمجموعه‌ها، یعنی a و $a + ۲d$، را انتخاب کنیم عضو دیگر، یعنی $a + d$، به صورت منحصربفرد تعیین می‌شود. همچنین توجه کنید که a و $a + ۲d$ یا هر دو زوج و یا هر دو فردند. چون مجموعهٔ X شامل

۱۰ عدد زوج و ۱۰ عدد فرد است، لذا به $\binom{10}{2} + \binom{10}{2}$ طریق می‌توانیم a و $a + ۲d$ را انتخاب کنیم، پس پاسخ مسأله برابر $۹۰ = ۲\binom{10}{2}$ است.

مسألهٔ ۲۰.۱.۳ ۱۰ نقطه روی یک دایره داده شده است. کلیهٔ وترهای بین این ۱۰ نقطه رسم شده‌اند. فرض کنید هیچ سه‌تا از این وترها درون دایره همرس نباشند. چند نقطهٔ تقاطع حاصل از رسم این وترها درون دایره ایجاد می‌شود؟

راه‌حل. چون هیچ سه وتری درون دایره همرس نیستند، لذا هر نقطهٔ تقاطع، محل برخورد دقیقاً دوتا از وترهای رسم شده است و چون هر وتر ۲ نقطه از ۱۰ نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند، پس هر نقطهٔ تقاطع متناظر با ۴ نقطه از ۱۰ نقطهٔ روی دایره است. برعکس به‌ازای هر ۴ نقطه از ۱۰ نقطه دقیقاً یک نقطه تقاطع درون دایره به‌دست می‌آید (شکل زیر را ملاحظه کنید). پس تعداد نقاط تقاطع برابر $\binom{10}{4}$ است.



مسائل

۱) ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره داده شده است. کلیهٔ وترهای بین دو به دوی این نقاط را رسم می‌کنیم.

الف) تعداد وترهای رسم شده را بیابید.

ب) تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رأس‌های هر یک روی دایره و اضلاع آن‌ها روی وترهای رسم شده باشد.

۲) به چند طریق می‌توان ۷ کتاب یکسان را بین ۱۰ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

۳) الف) مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲۰\}$ چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی دارد؟

ب) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود دارند؟

ج) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی هیچ یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود ندارند؟

د) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی حداقل یکی از ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟

ه) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی حداقل یکی از ۱، ۲ و ۳ وجود ندارد؟

و) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی عددی بزرگتر از ۱۵ وجود دارد؟

ز) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی کوچکترین عضو برابر ۵ و بزرگترین عضو برابر ۱۸ است؟

ح) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی اختلاف کوچکترین و بزرگترین عضو برابر ۱۰ است؟

ط) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی حداقل ۶ عدد فرد وجود دارد؟

ی) در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی حداقل ۳ عدد زوج و حداقل ۳ عدد فرد وجود دارد؟

۴) در یک دانشکده سه کلاس با ظرفیت‌های ۲۵، ۳۵ و ۴۰ نفر وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۱۰۰ دانشجو را بین این سه کلاس تقسیم کرد؟

۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ systems هیچ دو حرف s مجاور نیستند؟

۶) در یک جمع ۹ زوج حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۷ نفر از این جمع انتخاب کرد به‌طوری‌که دقیقاً یک زوج بین آن‌ها وجود داشته باشد؟

۷)* در یک کلاس ۳۰ دانش‌آموز با قدهای مختلف حضور دارند. می‌خواهیم ۶ نفر را برای تیم والیبال و از بین افراد باقی‌مانده ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به‌طوری‌که

الف) حداقل دو نفر از تیم والیبال از همهٔ اعضای تیم فوتبال بلندتر باشند؟

ب) دقیقاً دو نفر از تیم والیبال از همهٔ اعضای تیم فوتبال بلندتر باشند؟

ج) هر عضو تیم والیبال از حداقل ۴ عضو تیم فوتبال بلندتر باشد؟

د) عضوی از تیم والیبال وجود داشته باشد که دقیقاً از یک عضو تیم فوتبال بلندتر باشد؟

ه) برای هر دو عضو از تیم والیبال عضوی از تیم فوتبال وجود داشته باشد که از یکی کوتاهتر و از دیگری بلندتر باشد؟

۸) در یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ چند مستطیل دیده می‌شود؟

۹) می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس، به مدت ۴ روز، هر روز یک تیم ۶ نفره جهت مسابقه انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به‌طوری‌که تیم‌های هیچ دو روزی یکسان نباشند؟

۱۰) ۷ مرد و ۱۰ زن به چند طریق می‌توانند تشکیل ۵ زوج بدهند؟

۱۱) یک چهارم زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ عدد ۵ را دارند. مقدار n را بیابید.

۱۲) در چند عدد ۱۰ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵

الف) دقیقاً دو رقم ۳ وجود دارد؟

ب) دقیقاً دو رقم ۳ و سه رقم ۴ وجود دارد؟

ج) دقیقاً ۴ رقم فرد وجود دارد؟

د) حداقل ۸ رقم فرد وجود دارد؟

۱۳) در چند جایگشت ۱۰ حرفی از ۲۶ حرف انگیسی

الف) دقیقاً سه حرف صدادار وجود دارد؟

ب) حداقل سه حرف صدادار وجود دارد؟

۱۴)* در چند عدد ۷ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دقیقاً دو رقم مختلف وجود دارد؟

۱۵)* در چند جایگشت $a_1a_2\ldots a_9$ از ارقام ۱ تا ۹

الف) $a_1 < a_2 < a_3$، $a_4 < a_5 < a_6$ و $a_7 < a_8 < a_9$؟

ب) $a_1 < a_2 < a_3$ و $a_1 < a_4 < a_5$؟

ج) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$، $a_2 < a_5$ و $a_1 < a_6$؟

د) $a_1 < a_2 < a_3$، $a_1 < a_4 < a_5$، $a_2 < a_6 < a_7$ و $a_1 < a_8 < a_9$؟

۱۶)* یک تاس را ۲۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) در چند حالت سومین ٦ در پرتاب دهم به‌دست می‌آید؟

ب) در چند حالت سومین ٦ در پرتاب هفتم و هفتمین ٦ در پرتاب هفدهم به‌دست می‌آید؟

ج) در چند حالت سومین ٦ در پرتاب دوازدهم و چهارمین ۵ در پرتاب سیزدهم به‌دست می‌آید؟

د) در چند حالت سومین ٦ در پرتاب دوازدهم و چهارمین ۵ در پرتاب چهاردهم به‌دست می‌آید؟

۱۷)* ۳۰ صندلی در یک ردیف با شماره‌های ۱ تا ۳۰ قرار دارند. ۸ معلم، ۱۰ دکتر و ۱۲ مهندس به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به‌طوری‌که

الف) چهارمین مهندس روی صندلی شمارهٔ ۱۰ نشسته باشد؟ (منظور این است که روی صندلی‌های شمارهٔ ۱ تا ۹ دقیقاً ۳ مهندس نشسته باشند و روی صندلی دهم نیز مهندس نشسته باشد.)

ب) چهارمین مهندس روی صندلی شمارهٔ ۱۰ و نهمین مهندس روی صندلی شمارهٔ ۲۰ نشسته باشد؟

ج) چهارمین مهندس روی صندلی شمارهٔ ۱۲ و چهارمین دکتر روی صندلی شمارهٔ ۱۳ نشسته باشد؟

د) چهارمین مهندس روی صندلی شمارهٔ ۱۲ و پنجمین دکتر روی صندلی شمارهٔ ۱۴ نشسته باشد؟

۱۸) ۲۰ نفر را به چند طریق می‌توان به

الف) سه تیم ۵، ۷ و ۸ نفره تقسیم کرد؟

ب) دو تیم ٦ نفره و یک تیم ۸ نفره تقسیم کرد؟

ج) دو تیم ۴ نفره و دو تیم ٦ نفره تقسیم کرد؟

د) چهار تیم ۳ نفره و ۲ تیم ۴ نفره تقسیم کرد؟

۱۹) به چند طریق می‌توان سه تیم ۴ نفره و دو تیم ۳ نفره از بین ۲۵ نفر انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ دو تیمی عضو مشترک نداشته باشند؟

۲۰) به چند طریق می‌توان ۴ دکتر و ٦ مهندس را به دو گروه ۵ نفره تقسیم کرد به‌طوری‌که در هر گروه حداقل یک دکتر حضور داشته باشد؟

۲۱)* الف) در چند عدد ۷ رقمی دقیقاً ۴ رقم فرد وجود دارد؟

ب) در چندتا از این اعداد رقم تکراری وجود ندارد؟

۲۲) یک امتحان از ۲۰ تست چهارگزینه‌ای تشکیل شده است. دانش‌آموز می‌تواند حداکثر یکی از گزینه‌های هر تست را علامت بزند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد به‌طوری‌که دقیقاً به ۱۲ تست پاسخ درست دهد؟

۲۳) ۶ مهرهٔ رخ یکسان را به چند طریق می‌توان در ۶ خانه از یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرارداد به‌طوری‌که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند؟

۲۴)* به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به‌طوری‌که در هر اتاق حداقل یک نفر قرار گیرد؟

۲۵)* به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به اتاق‌های A، B، C و D تقسیم کرد به‌طوری‌که هیچ اتاقی خالی نماند و تعداد افراد در اتاق‌های A و B برابر باشد؟

۲۶) n ضلعی محدب $A_1A_2\ldots A_n$ داده شده است $(n \geq 4)$. چند مثلث وجود دارد که رأس‌های آن متعلق به رأس‌های n ضلعی باشد و

الف) دقیقاً یک ضلع از مثلث بر اضلاع n ضلعی منطبق باشد؟

ب) هیچ ضلع مثلث بر اضلاع n ضلعی منطبق نباشد؟

۲۷) روی هر ضلع از مثلث ABC، ۵ نقطه را علامت گذاشته‌ایم.

الف) چند چهارضلعی

ب) چند پنج‌ضلعی

وجود دارد که رأس‌های هر یک متعلق به این ۱۵ نقطه باشد؟

۲۸) روی هر ضلع از مربع $ABCD$، ۵ نقطه را علامت گذاشته‌ایم.

الف) چند مثلث

ب) چند چهارضلعی

ج) چند پنج‌ضلعی

وجود دارد که رأس‌های هر یک متعلق به این ۲۰ نقطه باشد؟

۲۹)* الف) ۱۲ نفر در یک ردیف ایستاده‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ دو فرد مجاوری با هم انتخاب نشوند؟

ب) ۱۲ نفر دور یک دایره ایستاده‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ دو فرد مجاوری با هم انتخاب نشوند؟

۳۰)* ۸ مرد و ۸ زن به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به‌طوری‌که هر مرد فقط با یک مرد دیگر مجاور باشد؟

۳۱)* ۲۰ نفر در یک ردیف ایستاده‌اند. به چند طریق می‌توان ٦ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به‌طوری‌که هر فرد انتخاب شده با حداقل یک فرد انتخاب شدهٔ دیگر مجاور باشد؟

۳۲)* ۲۰ نفر به چند طریق می‌توانند جلوی سه گیشهٔ متمایز به صف بایستند به‌طوری‌که جلوی هر گیشه حداقل یک نفر قرار گیرد؟

۳۳) ثابت کنید حاصل‌ضرب r عدد متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است.

۳۴)* ثابت کنید تعداد کلمات n حرفی با حروف a و b که دقیقاً m عبارت ab دارند برابر $\binom{n+۱}{۲m+۱}$ است.

۳۵)* چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از مجموعهٔ

الف) $\{۱, ۲, \ldots, ۳۰\}$

ب) $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$

تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند؟

۳۶)* n نقطه روی یک دایره داده شده است. کلیهٔ وترهای بین این نقاط را رسم کرده‌ایم. فرض کنید هیچ سه‌تا از این وترها درون دایره همرس نباشند.

الف) تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رأس‌های آن‌ها متعلق به نقاط روی دایره یا نقاط تقاطع حاصل از رسم وترها درون دایره و اضلاع آن‌ها روی وترهای رسم شده باشد.

ب) تعداد پاره‌خط‌هایی را بیابید که هر کدام روی یکی از وترهای رسم شده قرار دارند، دو سر آن‌ها متعلق به نقاط روی دایره یا نقاط تقاطع وترها است و در ضمن هیچ نقطهٔ تقاطعی روی آن‌ها قرار ندارد.

۳۷)* d_1 و d_2 دو خط موازی، A_1، ... و A_m نقاطی روی d_1 و B_1، ... و B_n نقاطی روی d_2 هستند. کلیهٔ پاره‌خط‌هایی را که یک سر آن‌ها متعلق به A_1، ... و A_m و سر دیگر متعلق به B_1، ... و B_n است رسم کرده‌ایم. فرض کنید هیچ سه‌تا از این پاره‌خط‌ها در نقطه‌ای بین d_1 و d_2 همرس نباشند.

الف) تعداد نقاط تقاطع حاصل از رسم این پاره‌خط‌ها را که بین d_1 و d_2 ایجاد می‌شوند بیابید.

ب) تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رأس‌های آن‌ها متعلق به نقاط روی d_1 و d_2 یا نقاط تقاطع بین d_1 و d_2 و اضلاع آن‌ها روی پاره‌خط‌های رسم شده باشد.

۳۸)* ۵ معلم، ۶ مهندس، ۴ دکتر، ۷ دانشجو و ۵ تاجر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به‌طوری‌که

الف) هر معلم از همهٔ دکترها جلوتر باشد؟

ب) هر معلم از همهٔ دکترها و هر دکتر از همه تاجرها جلوتر باشد؟

ج) هر معلم از همهٔ دکترها و هر مهندس از همهٔ تاجرها جلوتر باشد؟

د) هر معلم از حداقل یک دکتر جلوتر باشد؟

ه) هر معلم از حداقل یک دکتر و هر دکتر از حداقل یک تاجر جلوتر باشد؟

و) هر معلم از حداقل یک دکتر و هر مهندس از حداقل یک تاجر جلوتر باشد؟

ز) هر معلم از همهٔ دکترها و همهٔ تاجرها جلوتر باشد؟

ح) هر معلم و هر دکتر از حداقل یک تاجر جلوتر باشد؟

ط) اولین معلم و اولین دکتر مجاور باشند؟ (منظور از اولین معلم، اولین معلم از ابتدای صف است.)

ی) اولین معلم و اولین دکتر مجاور باشند و همچنین اولین مهندس و اولین تاجر نیز مجاور باشند؟

۳۹)* به‌ازای چند جایگشت $a_۱a_۲\dots a_{۱۰۰}$ از اعداد ۱ تا ۱۰۰ هیچ یک از اعداد

$$S_۱ = a_۱, \quad S_۲ = a_۱ + a_۲, \quad \dots \quad , \quad S_{۱۰۰} = a_۱ + a_۲ + \dots + a_{۱۰۰}$$

بر ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

۴۰) n ضلعی محدب $A_۱A_۲\dots A_n$ داده شده است $(n \geq ۵)$. چند چهارضلعی وجود دارد که رأس‌های آن متعلق به رأس‌های n ضلعی باشد و

الف) دقیقاً یک ضلع از چهارضلعی بر اضلاع n ضلعی منطبق باشد؟

ب) دقیقاً دو ضلع از چهارضلعی بر اضلاع n ضلعی منطبق باشد؟

۳—۲ بسط دوجمله‌ای

مجموع دو متغیر مختلف مانند $x + y$ را یک دوجمله‌ای می‌نامند. بسط دوجمله‌ای فرمولی برای محاسبهٔ توان‌های دوجمله‌ای است. در این بخش این فرمول را به‌دست می‌آوریم. مثلاً

فرمول‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$$(x+y)^{۱} = x+y$$

$$(x+y)^{۲} = x^{۲} + ۲xy + y^{۲}$$

$$(x+y)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲}y + ۳xy^{۲} + y^{۳}$$

قضیهٔ ۱.۲.۳ (قضیهٔ دوجمله‌ای) اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$(x+y)^n = \binom{n}{۰}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^{۲} + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

برهان. با توجه به رابطهٔ

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ بار}}$$

نتیجه می‌گیریم هر جمله از بسط $(x+y)^n$ به صورت $x^{n-k}y^k$ است، که در آن k عددی صحیح است و $۰ \leq k \leq n$. برای محاسبهٔ ضریب $x^{n-k}y^k$ باید ببینیم این جمله چند بار در حاصل‌ضرب فوق ظاهر می‌شود. برای تولید یک جملهٔ $x^{n-k}y^k$ در این حاصل‌ضرب باید k پرانتز را از n پرانتز انتخاب کنیم، سپس از هر یک از این k پرانتز متغیر y و از هر یک از $n-k$ پرانتز دیگر متغیر x را انتخاب کنیم. این کار را به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس ضریب $x^{n-k}y^k$ در بسط $(x+y)^n$ برابر $\binom{n}{k}$ است.

مثال ۲.۲.۳ بسط دوجمله‌ای $(x+y)^{۵}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}(x+y)^{۵} &= \binom{۵}{۰}x^{۵} + \binom{۵}{۱}x^{۴}y + \binom{۵}{۲}x^{۳}y^{۲} + \binom{۵}{۳}x^{۲}y^{۳} + \binom{۵}{۴}xy^{۴} + \binom{۵}{۵}y^{۵} \\ &= x^{۵} + ۵x^{۴}y + ۱۰x^{۳}y^{۲} + ۱۰x^{۲}y^{۳} + ۵xy^{۴} + y^{۵}\end{aligned}$$

مسألهٔ ۳.۲.۳ ضریب $x^{۵}y^{۸}$ در بسط $(۳x-۲y)^{۱۳}$ چند است؟

راه‌حل. جملهٔ عمومی بسط $(۳x - ۲y)^{۱۳}$ به صورت

$$\binom{۱۳}{k}(۳x)^{۱۳-k}(-۲y)^k = \binom{۱۳}{k} \times ۳^{۱۳-k} \times (-۲)^k x^{۱۳-k} y^k$$

است، که در آن k عددی صحیح است و $۰ \leq k \leq ۱۳$. به‌ازای $k = ۸$ جملهٔ $x^۵y^۸$ تولید می‌شود که ضریب آن برابر $۲^۸ \times ۳^۵ \times \binom{۱۳}{۸}$ است.

مسألهٔ ۴.۲.۳ ضریب $x^{۲۹}$ در بسط $(x^۲ - \frac{۳}{x})^{۲۵}$ چند است؟

راه‌حل. جملهٔ عمومی بسط $(x^۲ - \frac{۳}{x})^{۲۵}$ به صورت

$$\binom{۲۵}{k}(x^۲)^{۲۵-k}(-\frac{۳}{x})^k = \binom{۲۵}{k} \times (-۳)^k x^{۵۰-۳k}$$

است. به‌ازای $k = ۷$ جملهٔ $x^{۲۹}$ تولید می‌شود که ضریب آن برابر $-\binom{۲۵}{۷} \times ۳^۷$ است.

اعداد $\binom{n}{k}$ را که در بسط دوجمله‌ای ظاهر می‌شوند ضرایب دوجمله‌ای می‌نامند. یکی از مهم‌ترین روابط بین ضرایب دوجمله‌ای در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیه ۵.۲.۳ (اتحاد پاسکال) اگر $۰ < k < n$، آنگاه

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱}$$

برهان.

روش اول ـ روش جبری. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱} &= \frac{(n-۱)!}{k!(n-k-۱)!} + \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k)(n-۱)! + k(n-۱)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-۱)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

روش دوم ـ روش ترکیبیاتی. فرض کنید X مجموعه‌ای n عضوی باشد و $x \in X$. تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی X را به دو روش محاسبه می‌کنیم. از یک سو این تعداد برابر $\binom{n}{k}$

است و از سوی دیگر این تعداد برابر $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ است. زیرا زیرمجموعه‌های k عضوی X را می‌توان به دو دستهٔ مجزا تقسیم کرد، دستهٔ اول شامل زیرمجموعه‌هایی که عضو x را ندارند و دستهٔ دوم شامل زیرمجموعه‌هایی که عضو x را دارند. تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی که در دستهٔ اول قرار دارند برابر $\binom{n-1}{k}$ و تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی که در دستهٔ دوم قرار دارند برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است، پس

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

ضرایب دوجمله‌ای $(x+y)^n$، $n = 0, 1, 2, \ldots$، را مانند شکل زیر در یک مثلث قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

چون برای هر n، $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$، لذا همهٔ اعداد روی دو ضلع کناری این مثلث برابر ۱ هستند. همچنین بنابر اتحاد پاسکال هر جمله از این مثلث برابر مجموع دو جملهٔ بالایی خود است. پس این مثلث به صورت شکل زیر در می‌آید. این مثلث به مثلث پاسکال

معروف است.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&& ۱ &&&&&& \\ &&&&& ۱ && ۱ &&&&& \\ &&&& ۱ && ۲ && ۱ &&&& \\ &&& ۱ && ۳ && ۳ && ۱ &&& \\ && ۱ && ۴ && ۶ && ۴ && ۱ && \\ & ۱ && ۵ && ۱۰ && ۱۰ && ۵ && ۱ & \\ ۱ && ۶ && ۱۵ && ۲۰ && ۱۵ && ۶ && ۱ \\ &&&&&& \vdots &&&&&& \end{array}$$

اگر سطرهای مثلث پاسکال را به ترتیب با ۰، ۱، ۲ و ... شماره‌گذاری کنیم، آنگاه اعداد سطر n ام همان ضرایب بسط $(x+y)^n$ هستند. مثلاً به‌ازای $n = ۶$،

$$(x+y)^۶ = x^۶ + ۶x^۵y + ۱۵x^۴y^۲ + ۲۰x^۳y^۳ + ۱۵x^۲y^۴ + ۶xy^۵ + y^۶$$

مسألهٔ ۶.۲.۳ به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $۴^n - ۳n - ۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} ۴^n - ۳n - ۱ &= (۱+۳)^n - ۳n - ۱ \\ &= \left(۱ + ۳\binom{n}{۱} + ۳^۲\binom{n}{۲} + \cdots + ۳^n\binom{n}{n}\right) - ۳n - ۱ \\ &= ۳^۲\binom{n}{۲} + ۳^۳\binom{n}{۳} + \cdots + ۳^n\binom{n}{n} \\ &= ۹\left(\binom{n}{۲} + ۳\binom{n}{۳} + \cdots + ۳^{n-۲}\binom{n}{n}\right) \end{aligned}$$

در نتیجه $۴^n - ۳n - ۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسائل

۱) بسط دوجمله‌ای $(x+y)^{6}$ را بیابید.

۲) ضریب $x^{5}y^{12}$ در بسط $(3x-5y)^{17}$ چند است؟

۳) ضریب هر یک از جملات x^{8}، x^{15} و x^{64} را در بسط $(x+\frac{1}{x})^{100}$ بیابید.

۴) ضریب هر یک از جملات x^{100}، x^{101} و x^{102} را در بسط $(x^{2}-\frac{1}{x})^{100}$ بیابید.

۵) حاصل هر یک از مجموع‌های زیر را بیابید.

الف) $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^{2}\binom{n}{2}+\cdots+2^{n}\binom{n}{n}$

ب) $\binom{n}{0}-3\binom{n}{1}+3^{2}\binom{n}{2}-3^{3}\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n}3^{n}\binom{n}{n}$

ج) $2^{n}\binom{n}{0}+2^{n-1}\binom{n}{1}+2^{n-2}\binom{n}{2}+\cdots+2\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

د) $2^{n}\binom{n}{0}+2^{n-1}\times 3\binom{n}{1}+2^{n-2}\times 3^{2}\binom{n}{2}+\cdots+2\times 3^{n-1}\binom{n}{n-1}+3^{n}\binom{n}{n}$

۶) با استفاده از بسط دوجمله‌ای ثابت کنید

الف) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^{n}$

ب) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$

۷) با استفاده از اتحاد پاسکال هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید

الف) $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}=\binom{n}{k}$

ب) $\binom{n}{k}+3\binom{n}{k-1}+3\binom{n}{k-2}+\binom{n}{k-3}=\binom{n+3}{k}$

ج) $\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$

د)* $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$

(این تساوی به اتحاد چوشی‌چی معروف است.)

۸) الف) برای هر عدد زوج n ثابت کنید

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n}$$

ب) برای هر عدد فرد n ثابت کنید

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \binom{n}{\frac{n+3}{2}} > \cdots > \binom{n}{n}$$

۹)* هر یک از اتحادهای زیر را به روش ترکیبیاتی ثابت کنید.

الف) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

ب) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

ج) $k^2\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} + n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

د) $1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}$

ه) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$

و) $\binom{m}{k}\binom{n}{0} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k-2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{m}{0}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{k}$

(این تساوی به اتحاد واندرموند معروف است.)

ز) $\binom{n}{1} + 2\times 3\binom{n}{2} + 3\times 3^2\binom{n}{3} + 4\times 3^3\binom{n}{4} + \cdots + n\times 3^{n-1}\binom{n}{n} = n4^{n-1}$

ح) $\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}$

ط) $\binom{k}{k}\binom{n-k}{t} + \binom{k+1}{k}\binom{n-k-1}{t} + \binom{k+2}{k}\binom{n-k-2}{t} + \cdots + \binom{n-t}{k}\binom{t}{t} = \binom{n+1}{k+t+1}$

ی) $\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + 3\binom{n}{3}^2 + \cdots + n\binom{n}{n}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$

۱۰) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $7^n - 6n - 1$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است.

۱۱)* ثابت کنید

$$\binom{m}{k} + \binom{m+1}{k} + \binom{m+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$$

۱۲)* ثابت کنید ضریب x^k در عبارت

$$(x+۱)^m + (x+۱)^{m+۱} + (x+۱)^{m+۲} + \cdots + (x+۱)^n$$

به‌ازای $۰ \le k \le m-۱$ برابر $\binom{n+۱}{k+۱} - \binom{m}{k+۱}$ و به‌ازای $k \ge m$ برابر $\binom{n+۱}{k+۱}$ است.

۱۳)* ثابت کنید

$$\binom{m}{۱} + \binom{m+۱}{۲} + \binom{m+۲}{۳} + \cdots + \binom{m+n-۱}{n}$$
$$= \binom{n}{۱} + \binom{n+۱}{۲} + \binom{n+۲}{۳} + \cdots + \binom{n+m-۱}{m}$$

۱۴)* به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $۷^n - ۱۸n^۲ + ۱۲n - ۱$ بر ۲۱۶ بخش‌پذیر است.

۱۵)* عدد k را طوری بیابید که $\binom{۲n+k}{n}\binom{۲n-k}{n}$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۶)* فرض کنید $m \le n$. ثابت کنید

$$\frac{\binom{m}{۰}}{\binom{n}{۰}} + \frac{\binom{m}{۱}}{\binom{n}{۱}} + \frac{\binom{m}{۲}}{\binom{n}{۲}} + \cdots + \frac{\binom{m}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{n+۱}{n-m+۱}$$

۱۷)* ثابت کنید

$$\binom{n}{۰}^۲ + \binom{n}{۱}^۲ + \cdots + \binom{n}{n}^۲ = \binom{۲n}{n}$$

۱۸)* ثابت کنید

$$\binom{n}{۰}\binom{n}{۱} + \binom{n}{۱}\binom{n}{۲} + \binom{n}{۲}\binom{n}{۳} + \cdots + \binom{n}{n-۱}\binom{n}{n} = \binom{۲n}{n+۱}$$

۱۹)* به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n > ۱$، ثابت کنید

$$\binom{n}{۱} - ۲\binom{n}{۲} + ۳\binom{n}{۳} - ۴\binom{n}{۴} + \cdots + (-۱)^{n-۱}n\binom{n}{n} = ۰$$

فصل ۴

جایگشت‌های با تکرار

در فصل ۲ جایگشت‌های تعدادی شیء را که همگی متمایز باشند بررسی کردیم. در این فصل جایگشت‌های اشیائی را که در بین آن‌ها شیء تکراری وجود دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم و به عنوان کاربردهایی از آن مسألهٔ مسیر و بسط چندجمله‌ای را مطرح می‌کنیم.

۴—۱ جایگشت‌های با تکرار

با حل یک مسأله بحث را آغاز می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۱.۴ چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi وجود دارد؟

راه‌حل اول. کلمهٔ داده شده شامل ۱۱ حرف است که از ۴ حرف متمایز m، i، s و p تشکیل شده است و این ۴ حرف به ترتیب ۱، ۴، ۴ و ۲ بار در کلمه آمده‌اند. لذا برای ساختن یک جایگشت ۱۱ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم و حروف m، i، s و p را به ترتیب در این مکان‌ها قرار می‌دهیم. حرف m را به ۱۱ طریق می‌توانیم در یکی از ۱۱ مکان قرار دهیم، ۴ حرف i را به $\binom{۱۰}{۴}$ طریق می‌توانیم در ۴ مکان از ۱۰ مکان باقی‌مانده قرار دهیم، ۴ حرف s را

به $\binom{۶}{۴}$ طریق می‌توانیم در ۴ مکان از ۶ مکان باقی‌مانده قرار دهیم و در نهایت ۲ حرف p را به یک طریق می‌توانیم در ۲ مکان باقی‌مانده قرار دهیم.

○○○○○○○○○○○

پس تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ mississippi برابر است با

$$۱۱ \times \binom{۱۰}{۴} \times \binom{۶}{۴} = ۱۱ \times \frac{۱۰!}{۴!۶!} \times \frac{۶!}{۴!۲!} = \frac{۱۱!}{۴!۴!۲!}$$

راه‌حل دوم. تعداد جایگشت‌های نمادهای m، $i_۱$، $i_۲$، $i_۳$، $i_۴$، $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$، $s_۴$، $p_۱$ و $p_۲$ را به دو طریق حساب می‌کنیم. از یک طرف این تعداد برابر !۱۱ است. از طرف دیگر، از هر جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi به $۲! \times ۴! \times ۴!$ طریق می‌توان به یکی از این جایگشت‌ها رسید زیرا به !۴ طریق می‌توان ۴ حرف i را به نمادهای $i_۱$، $i_۲$، $i_۳$ و $i_۴$، به !۴ طریق می‌توان ۴ حرف s را به نمادهای $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$ و $s_۴$ و به !۲ طریق ۲ حرف p را به نمادهای $p_۱$ و $p_۲$ تبدیل کرد. پس اگر تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ mississippi برابر x باشد، آنگاه $۱۱! = ۲!x \times ۴! \times ۴!$، پس $x = \frac{۱۱!}{۴!۴!۲!}$.

فرض کنید در بین n شیء داده شده $n_۱$ شیء از نوع اول، $n_۲$ شیء از نوع دوم، ... و n_k شیء از نوع k باشد، $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$. تعداد جایگشت‌های این n شیء را با نماد $P(n; n_۱, n_۲, \ldots, n_k)$ نشان می‌دهیم. مشابه هر یک از روش‌هایی که در حل مسألهٔ قبل به‌کار رفت می‌توان ثابت کرد که

$$P(n; n_۱, n_۲, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$$

مسألهٔ ۲.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ management هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

راه‌جل. ابتدا حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به

$$P(۶; ۲, ۲, ۱, ۱) = \frac{۶!}{۲!۲!}$$

طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس دو حرف a را در دو مکان از هفت مکان ایجاد شده بین ٦ حرف صدادار قرار می‌دهیم و در نهایت دو حرف e را در دو مکان از ۵ مکان باقی‌مانده بین حروف صدادار قرار می‌دهیم. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{6!}{2!2!} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2}$$

مسألهٔ ۳.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ manumission حروف صدادار مجاورند؟

راه‌حل. حروف صدادار را در یک دسته قرار می‌دهیم.

$$\mathbf{a,u,i,i,o}, \mathbf{m,n,m,s,s,n}$$

تعداد جایگشت‌های این دسته به همراه حروف بی‌صدا برابر $P(7;2,2,2,1)$ است و تعداد جایگشت‌های حروف صدادار در بسته‌ای که در آن قرار دارند برابر $P(5;2,1,1,1)$ است. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$P(7;2,2,2,1)P(5;2,1,1,1) = \frac{7!}{2!2!2!} \times \frac{5!}{2!}$$

مسألهٔ ۴.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ message حرف m با حداقل یک حرف e مجاور است؟

راه‌حل اول. چون کلمهٔ message دو حرف e دارد، لذا حرف m ممکن است با یک یا دو حرف e مجاور باشد. فرض کنید A_1 و A_2 مجموعهٔ جایگشت‌هایی باشند که در آن‌ها حرف m به ترتیب با یک و دو حرف e مجاور است. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حرف m با دو حرف e مجاور است برابر تعداد جایگشت‌های دستهٔ eme به همراه بقیه حروف است، لذا $|A_2| = \frac{5!}{2!}$.

eme,s,s,a,g

برای محاسبهٔ تعداد اعضای A_1 حرف m را با یک حرف e در یک دسته قرار می‌دهیم و جایگشت‌های این دسته را به همراه بقیهٔ حروف غیر از e در نظر می‌گیریم. تعداد این

جایگشت‌ها برابر $\frac{5!}{2!} \times 2$ است.

$$m,e,s,s,a,g$$

حال به‌ازای هر یک از این جایگشت‌ها دومین حرف e را به ۵ طریق می‌توانیم در مکان‌های ایجاد شده بین حروف قرار دهیم به‌طوری‌که مجاور حرف m قرار نگیرد، پس $|A_1| = \frac{5!}{2!} \times 2 \times 5$. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|A_1| + |A_2| = \frac{5!}{2!} \times 2 \times 5 + \frac{5!}{2!} = 660$$

راه‌حل دوم. فرض کنید A_1 و A_2 همان مجموعه‌هایی باشند که در راه‌حل اول معرفی شده‌اند. تعداد جایگشت‌های یک دسته شامل حروف m و e به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{6!}{2!} \times 2$ است.

$$m,e,s,s,a,g,e$$

در این شمارش هر عضو A_1 یک بار و هر عضو A_2 دو بار شمرده شده است، لذا $|A_1| + 2|A_2| = \frac{6!}{2!} \times 2$. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$|A_1| + |A_2| = (|A_1| + 2|A_2|) - |A_2| = 6! - \frac{5!}{2!} = 660$$

مسألهٔ ۵.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mathematics عبارت ma وجود دارد؟

راه‌حل اول. چون کلمهٔ mathematics دو حرف m و دو حرف a دارد، لذا یک جایگشت از حروف این کلمه ممکن است یک یا دو عبارت ma داشته باشد. فرض کنید A_1 و A_2 مجموعهٔ جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب یک و دو عبارت ma دارند. به وضوح $|A_2| = \frac{9!}{2!2!}$.

$$ma,ma,t,h,e,t,i,c,s$$

برای محاسبهٔ تعداد اعضای A_1 یک دسته برای عبارت ma در نظر می‌گیریم و جایگشت‌های این دسته را به همراه بقیهٔ حروف غیر از a در نظر می‌گیریم. تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{9!}{2!}$ است.

$$ma,t,h,e,m,t,i,c,s$$

حال به‌ازای هر یک از این جایگشت‌ها دومین حرف a را به ۹ طریق می‌توانیم در مکان‌های ایجاد شده بین حروف قرار دهیم به‌طوری‌که دومین عبارت ma تولید نشود، پس $|A_۱| = \frac{۹!}{۲!} \times ۹$. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|A_۱| + |A_۲| = \frac{۹!}{۲!} \times ۹ + \frac{۹!}{۲!۲!}$$

راه‌حل دوم. فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ همان مجموعه‌هایی باشند که در راه‌حل اول معرفی شده‌اند. تعداد جایگشت‌های یک دستهٔ ma به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{۱۰!}{۲!}$ است.

ma,t,h,e,m,a,t,i,c,s

در این شمارش هر عضو $A_۱$ یک بار و هر عضو $A_۲$ دو بار شمرده شده است، لذا $|A_۱| + ۲|A_۲| = \frac{۱۰!}{۲!}$. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$|A_۱| + |A_۲| = (|A_۱| + ۲|A_۲|) - |A_۲| = \frac{۱۰!}{۲!} - \frac{۹!}{۲!۲!}$$

مسألهٔ ۶.۱.۴ در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف a، b و c، هر یک از این حروف حداکثر ۴ بار ظاهر شده‌اند؟

راه‌حل. کلمات گفته شده را به دو دسته می‌توان تقسیم کرد. دستهٔ اول شامل کلماتی است که دو حرف در آن‌ها ۴ بار و حرف دیگر ۲ بار ظاهر شده و دستهٔ دوم شامل کلماتی است که دو حرف در آن‌ها ۳ بار و حرف دیگر ۴ بار ظاهر شده است. تعداد کلمات دستهٔ اول برابر $\frac{۱۰!}{۴!۴!۲!} \times \binom{۳}{۲}$ است زیرا ابتدا باید دو حرف از بین a، b و c انتخاب کنیم، سپس کلمه‌ای ۱۰ حرفی بسازیم که هر یک از دو حرف انتخاب شده ۴ بار و حرف دیگر ۲ بار در آن تکرار شده باشد. به طور مشابه تعداد کلمات دستهٔ دوم برابر $\frac{۱۰!}{۳!۳!۴!} \times \binom{۳}{۲}$ است. پس پاسخ مسأله

برابر است با

$$\binom{۳}{۲} \times \frac{۱۰!}{۴!۴!۲!} + \binom{۳}{۲} \times \frac{۱۰!}{۳!۳!۴!}$$

مسألهٔ ۷.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mathematics در سمت راست هر حرف m و چسبیده به آن حرفی صدادار قرار دارد؟

راه‌حل. به جای هر یک از ۴ حرف صدادار حرف x قرار می‌دهیم، حال دو دسته به صورت mx در نظر گرفته و جایگشت‌های این دو دسته را به همراه بقیهٔ حروف در نظر می‌گیریم. تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{۹!}{۲!۲!۲!}$ است.

mx, mx, t, h, t, c, s, x, x

حال به‌ازای هر چنین جایگشتی به $\frac{۴!}{۲!}$ طریق می‌توانیم دو حرف a، یک حرف e و یک حرف i را به جای ۴ حرف x قرار می‌دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۹!}{۲!۲!۲!} \times \frac{۴!}{۲!}$$

مسألهٔ ۸.۱.۴ در چند کلمهٔ ٦ حرفی با حروف a، b، c، d، e، f و g دقیقاً چهار حرف متمایز وجود دارد؟

راه‌حل. ابتدا ۴ حرف از ۷ حرف داده شده را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۷}{۴}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال باید دو حرف از همین حروف انتخاب شده را به چهار حرف اضافه کنیم و با ٦ حرف بدست آمده کلمه بسازیم. دو حالت برای این دو حرف وجود دارد که یکسان باشند یا متمایز. اگر دو حرف یکسان باشند برای انتخاب آن‌ها $\binom{۴}{۱}$ راه وجود دارد و به‌ازای هر چنین انتخابی به $\frac{٦!}{۳!}$ طریق می‌توان کلمه را ساخت و اگر دو حرف متمایز باشند برای انتخاب آن‌ها $\binom{۴}{۲}$ راه وجود دارد و به‌ازای هر چنین انتخابی به $\frac{٦!}{۲!۲!}$ طریق می‌توان کلمه را ساخت. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۷}{۴}\left(\binom{۴}{۱} \times \frac{٦!}{۳!} + \binom{۴}{۲} \times \frac{٦!}{۲!۲!}\right)$$

مسألهٔ ۹.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ management هر حرف m با حداقل یک حرف a مجاور است؟

راه‌حل. هر حرف m را با یک حرف a در یک دسته قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های این دو دسته به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{۸!}{۲!۲!۲!} \times ۲ \times ۲$ است.

$$\mathbf{m,a}\;\mathbf{m,a}\;\mathbf{n,n,e,e,g,t}$$

علاوه بر این جایگشت‌ها، جایگشت‌هایی که عبارت mam را دارند و در ضمن حرف a در آن‌ها با عبارت mam مجاور نیست نیز مطلوبند. برای محاسبهٔ تعداد این جایگشت‌ها ابتدا ٦ حرف غیر از حروف m و a را در یک ردیف قرار می‌دهیم، سپس عبارت mam و حرف a را در دو مکان از هفت مکان ایجاد شده بین این ٦ حرف قرار می‌دهیم. پس تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{٦!}{۲!۲!} \times P(۷,۲)$ است. لذا پاسخ مساله برابر است با

$$\frac{۸!}{۲!۲!۲!} \times ۲ \times ۲ + \frac{٦!}{۲!۲!} \times P(۷,۲)$$

مسألهٔ ۱۰.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international هر حرف t با دو حرف صدادار مجاور است؟

راه‌حل. به جای هر یک از حروف صدادار x قرار می‌دهیم. جایگشت‌هایی را که در آن‌ها t با دو حرف صدادار مجاور است می‌توانیم به دو دسته تقسیم کنیم. دستهٔ اول شامل جایگشت‌هایی است که دو حرف t در مجموع با سه حرف صدادار مجاورند و دستهٔ دوم شامل جایگشت‌هایی است که دو حرف t در مجموع با چهار حرف صدادار مجاورند. تعداد جایگشت‌های دستهٔ اول برابر $\frac{٦!}{۲!۲!} \times \frac{۹!}{۳!۳!}$ است ($\frac{٦!}{۲!۲!}$ برابر تعداد راه‌های قرار دادن ٦ حرف صدادار به جای ٦ حرف x است).

xtxtx,x,x,x,n,n,n,r,l

تعداد جایگشت‌های دستهٔ دوم نیز برابر $\frac{۹!}{۲!۲!۳!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$ است.

xtx,xtx,x,x,n,n,n,r,l

پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۹!}{۳!۳!} \times \frac{۶!}{۲!۲!} + \frac{۹!}{۲!۲!۳!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

مسألهٔ ۱۱.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international اولین حرف n قبل از اولین حرف t (نه لزوماً چسبیده به آن) قرار دارد؟

راه‌حل. چون کلمهٔ داده شده ۱۳ حرف دارد، لذا ۱۳ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا همهٔ حروف غیر از حروف n و t را در ۸ مکان از ۱۳ مکان قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{۱۳}{۸} \times \frac{۸!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال ۳ حرف n و ۲ حرف t را باید در ۵ مکان باقی‌مانده قرار دهیم. با توجه به شرط مسأله در اولین مکان از این ۵ مکان باید حرف n را قرار دهیم. حال ۲ حرف n و ۲ حرف t را به $\frac{۴!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم در ۴ مکان باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۱۳}{۸} \times \frac{۸!}{۲!۲!} \times \frac{۴!}{۲!۲!}$$

مسألهٔ ۱۲.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international اولین حرف n قبل از اولین حرف t و چسبیده به آن قرار دارد؟

راه‌حل. یک عبارت nt در نظر می‌گیریم. این عبارت به همراه ۱۱ حرف دیگر تشکیل ۱۲ شیء را می‌دهند، لذا ۱۲ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا ۸ حرف غیر از n و t را در ۸ مکان از این ۱۲ مکان قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{۱۲}{۸} \times \frac{۸!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال در اولین مکان از ۴ مکان باقی‌مانده باید عبارت nt را قرار دهیم و ۳ حرف

باقی‌مانده را به $\frac{۳!}{۲!}$ طریق می‌توانیم در ۳ مکان دیگر قرار دهیم. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۱۲}{۸} \times \frac{۸!}{۲!۲!} \times \frac{۳!}{۲!}$$

مسألهٔ ۱۳.۱.۴ در چند جایگشت از ارقام عدد ۱۱۱۲۲۲۲۳۳۳۴۴۵ اولین رقم ۱ قبل از اولین رقم ۲ و اولین رقم ۲ قبل از اولین رقم ۳ قرار دارد؟

راه‌حل. چون عدد داده شده ۱۳ رقم دارد، لذا ۱۳ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا ارقام ۴ و ۵ را در ۳ مکان از این ۱۳ مکان قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{۱۳}{۳} \times \frac{۳!}{۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. با توجه به شرط مسأله در اولین مکان از ۱۰ مکان باقی‌مانده باید رقم ۱ قرار دهیم. دو رقم دیگر ۱ را به $\binom{۹}{۲}$ طریق می‌توانیم در دو مکان از ۹ مکان باقی‌مانده قرار دهیم. با توجه به شرط مسأله در اولین مکان از ۷ مکان باقی‌مانده باید رقم ۲ قرار دهیم و ۶ مکان دیگر را به $\frac{۶!}{۳!۳!}$ طریق می‌توانیم با ۳ رقم ۲ و ۳ رقم ۳ پر کنیم. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۱۳}{۳} \times \frac{۳!}{۲!} \times \binom{۹}{۲} \times \frac{۶!}{۳!۳!}$$

مسألهٔ ۱۴.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi هیچ یک از عبارت‌های ss و sp وجود ندارند؟

راه‌حل. ابتدا همهٔ حروف غیر از حروف s را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $\frac{۷!}{۴!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم.

$$m, i, i, i, i, p, p$$

حال چهار حرف s را باید در ۴ مکان از ۸ مکان ایجاد شده بین این ۷ حرف قرار دهیم به‌طوری‌که هیچ یک از این حروف s در سمت چپ هیچ یک از دو حرف p قرار نگیرند. این کار را به $\binom{۶}{۴}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۷!}{۴!۲!} \times \binom{۶}{۴}$$

مسألهٔ ۱۵.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ potentiation هیچ یک از عبارت‌های nn و tt وجود ندارند؟

راه‌حل. ابتدا همهٔ حروف غیر از حروف t را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $\frac{۹!}{۲!۲!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم که در $\frac{۸!}{۲!۲!}$ تا از این جایگشت‌ها دو حرف n مجاور یکدیگر قرار دارند.

$$p, o, o, e, n, n, i, i, a$$

اگر در یکی از این جایگشت‌ها دو حرف n مجاور نباشند، سه حرف t را باید در ۳ مکان از ۱۰ مکان ایجاد شده بین ۹ حرف قرار دهیم و اگر دو حرف n مجاور باشند، آنگاه یکی از حروف t را باید بین دو حرف n و دو حرف دیگر t را در ۲ مکان از ۹ مکان دیگر قرار دهیم. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$(\frac{۹!}{۲!۲!۲!} - \frac{۸!}{۲!۲!}) \times \binom{۱۰}{۳} + \frac{۸!}{۲!۲!} \times \binom{۹}{۲}$$

مسألهٔ ۱۶.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ insignificance دومین حرف i در مکان چهارم و دومین حرف n در مکان ششم جایگشت قرار دارد؟ (مثلاً کلمهٔ داده شده هر دوی این ویژگی‌ها را دارد.)

راه‌حل. چون کلمهٔ داده شده ۱۴ حرف دارد، لذا ۱۴ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم و در مکان‌های چهارم و ششم به ترتیب حروف i و n را قرار می‌دهیم. جایگشت‌های مورد نظر را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. در دستهٔ اول جایگشت‌هایی را قرار می‌دهیم که حرف پنجم آن‌ها i است و بقیهٔ جایگشت‌ها را در دستهٔ دوم قرار می‌دهیم.

برای تشکیل یک جایگشت از دستهٔ اول باید یکی از سه حرف اول را i و یکی دیگر از این سه حرف را n قرار دهیم. همچنین باید یکی از هشت حرف آخر را i و یکی دیگر از این هشت

حرف را n قرار دهیم و ۷ حرف دیگر را به دلخواه در ۷ مکان خالی باقی‌مانده قرار دهیم. پس تعداد جایگشت‌های دستهٔ اول برابر $\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۸}{۱}\binom{۷}{۱} \times \frac{۷!}{۲!}$ است.

برای تشکیل یک جایگشت از دستهٔ دوم نیز باید یکی از سه حرف اول را i، یکی از ۵ حرف اول را n، دوتا از ۸ حرف آخر را i و یکی از ۸ حرف آخر را n قرار دهیم و بقیهٔ حروف را به دلخواه در مکان‌های باقی‌مانده قرار دهیم. لذا تعداد جایگشت‌های دستهٔ دوم برابر $\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۱} \times \frac{۷!}{۲!}$ است.

پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۸}{۱}\binom{۷}{۱} \times \frac{۷!}{۲!} + \binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۱} \times \frac{۷!}{۲!}$$

مسألهٔ ۱۷.۱.۴ چند جایگشت ۱۰ حرفی از حروف کلمهٔ mississippi وجود دارد؟

راه‌حل اول. چون کلمهٔ mississippi، ۱۱ حرف دارد، لذا برای تشکیل یک جایگشت ۱۰ حرفی از حروف این کلمه باید یک حرف را کنار بگذاریم. اگر به ترتیب m، i، s و p را کنار بگذاریم، تعداد جایگشت‌های بقیهٔ حروف به ترتیب برابر $\frac{۱۰!}{۴!۴!۲!}$، $\frac{۱۰!}{۳!۴!۲!}$، $\frac{۱۰!}{۴!۳!۲!}$ و $\frac{۱۰!}{۴!۴!}$ است. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۱۰!}{۴!۴!۲!} + \frac{۱۰!}{۳!۴!۲!} + \frac{۱۰!}{۴!۳!۲!} + \frac{۱۰!}{۴!۴!} = \frac{(۱+۴+۴+۲) \times ۱۰!}{۴!۴!۲!} = \frac{۱۱!}{۴!۴!۲!}$$

راه‌حل دوم. از هر جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi با کنار گذاشتن حرف اول می‌توانیم به جایگشتی ۱۰ حرفی از حروف این کلمه برسیم. برعکس برای هر جایگشت ۱۰ حرفی از حروف کلمهٔ mississippi دقیقاً یک حرف از حروف این کلمه در جایگشت وجود ندارد. با قرار دادن این حرف در ابتدای جایگشت ۱۰ حرفی به جایگشتی از حروف کلمهٔ mississippi

می‌رسیم، لذا تناظری یک‌به‌یک بین جایگشت‌های حروف کلمهٔ mississippi و جایگشت‌های ۱۰ حرفی از حروف این کلمه وجود دارد. پس تعداد جایگشت‌های ۱۰ حرفی از حروف این کلمه برابر $\frac{۱۱!}{۴!۴!۲!}$ است.

در حالت کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۱۸.۱.۴ تعداد جایگشت‌های n شیء برابر تعداد جایگشت‌های $n-۱$ شیء از این n شیء است.

مسألهٔ ۱۹.۱.۴ چند جایگشت ۵ حرفی از حروف کلمهٔ management وجود دارد؟

راه‌حل. کلمهٔ management، ٦ حرف متمایز دارد که حروف m، a، n و e در آن دو بار و حروف g و t در آن یک بار ظاهر شده‌اند. تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف این کلمه که ۵، ۴ و ۳ حرف متمایز دارند به ترتیب برابر $\binom{٦}{۵} \times ۵!$، $\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳} \times \frac{۵!}{۲!}$ و $\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱} \times \frac{۵!}{۲!۲!}$ است (مثلاً برای تشکیل یک جایگشت ۵ حرفی با ۳ حرف متمایز ابتدا دو حرف از m، a، n و e را انتخاب می‌کنیم و از هر یک دوتا برای تشکیل جایگشت برمی‌داریم، سپس از ۴ حرف باقی‌مانده نیز یک حرف را انتخاب می‌کنیم و در نهایت با ۵ حرف انتخاب شده یک کلمه می‌سازیم). پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{٦}{۵} \times ۵! + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳} \times \frac{۵!}{۲!} + \binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱} \times \frac{۵!}{۲!۲!}$$

مسائل

۱) الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ mathematics وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت حروف صدادار مجاورند؟

ج) در چند جایگشت هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

د) چند جایگشت با حرف صدادار شروع می‌شوند؟

ه) چند جایگشت با حرف صدادار شروع و به حرف بی‌صدا تمام می‌شوند؟

و) در چند جایگشت حرف h با دو حرف صدادار مجاور است؟

ز) در چند جایگشت هر حرف بی‌صدا با حرفی صدادار مجاور است؟

۲) الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ institutional وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت دو حرف اول صدادارند؟

ج) در چند جایگشت حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار دارند؟

د) در چند جایگشت هیچ یک از عبارت‌های tt و tn وجود ندارند؟

ه)* در چند جایگشت حرف s با هیچ حرف صداداری مجاور نیست؟

و)* در چند جایگشت حرف s با حداقل یک i مجاور است و هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

ز) در چند جایگشت هر حرف صدادار فقط با یک حرف صدادار دیگر مجاور است؟

ح) در چند جایگشت هر حرف صدادار با حداقل یک حرف t مجاور است؟

ط)* در چند جایگشت عبارت ti دقیقاً دوبار آمده است؟

ی)* در چند جایگشت عبارت tn دقیقاً یک بار آمده است؟

۳) الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ repetition وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت حرف r با حداقل یک حرف e مجاور است؟

ج) در چند جایگشت عبارت ti وجود دارد؟

د) در چند جایگشت در سمت راست هر حرف t و چسبیده به آن حرفی صدادار قرار دارد؟

ه) در چند جایگشت هر حرف t با حداقل یک حرف i مجاور است؟

و) در چند جایگشت هر حرف t با دو حرف صدادار مجاور است؟

ز)* در چند جایگشت هر حرف صدادار با حداقل یک حرف صدادار دیگر مجاور است؟

۴) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international

الف) حرف r با حداقل یک حرف صدادار مجاور است؟

ب) عبارت na وجود دارد؟

ج) هر حرف n با حداقل یک حرف a مجاور است؟

د) هر حرف صدادار با حداقل یک حرف n مجاور است؟

ه) هیچ یک از عبارت‌های nn و tn وجود ندارند؟

و) هیچ یک از عبارت‌های nn و tt وجود ندارند؟

ز)* هیچ یک از عبارت‌های nn، nt و tn وجود ندارند؟

ح) هر حرف صدادار فقط با یک حرف صدادار دیگر مجاور است؟

ط)* هر حرف t دقیقاً با یک حرف a مجاور است؟

ی)* هر حرف t با یک حرف صدادار و با یک حرف بی‌صدا مجاور است؟

۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi

الف)* عبارت si دقیقاً سه بار آمده است؟

ب)* عبارت si دقیقاً دو بار آمده است؟

ج) هر حرف p با دو حرف i مجاور است؟

د) هیچ یک از عبارت‌های ss و pp وجود ندارند؟

ه) هر حرف غیر از m دقیقاً با یک حرف مشابه خود مجاور است؟

٦) در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف a، b، c و d، هر یک از این حروف

الف) حداکثر سه‌بار ظاهر شده‌اند؟

ب) حداقل دوبار ظاهر شده‌اند؟

۷) در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف الفبای انگلیسی

الف) دقیقاً ۹ حرف مختلف وجود دارد؟

ب) دقیقاً ۸ حرف مختلف وجود دارد؟

ج) دقیقاً ۷ حرف مختلف وجود دارد؟

۸) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi

الف) اولین حرف s قبل از اولین حرف p قرار دارد؟

ب) اولین حرف s قبل از اولین حرف p و چسبیده به آن قرار دارد؟

ج) اولین حرف i قبل از اولین حرف s و اولین حرف s قبل از اولین حرف p قرار دارد؟

د) اولین حرف i قبل از اولین حرف s و قبل از اولین حرف p قرار دارد؟

۹) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ nashvilletennessee

الف) اولین حرف n قبل از اولین حرف s و اولین حرف e قبل از اولین حرف l قرار دارد؟

ب) اولین حرف n قبل از اولین حرف s و چسبیده به آن و اولین حرف e قبل از اولین حرف l و چسبیده به آن قرار دارد؟

ج) اولین حرف n قبل از آخرین حرف s و چسبیده به آن قرار دارد؟

د)* بین هر دو حرف n حداقل یک حرف e قرار دارد؟

ه)* بین هر دو حرف n حداقل دو حرف e قرار دارد؟

و) دومین و سومین حرف e مجاورند؟

ز)* بین دومین و سومین حرف e حرف n قرار ندارد؟

ح)* دومین حرف n و سومین حرف e مجاورند؟

ط)* آخرین حرف n قبل از سومین حرف e قرار دارد؟

ی)* دومین حرف n قبل از سومین حرف e قرار دارد؟

۱۰) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international

الف) اولین n قبل از اولین t قرار دارد و هیچ دو حرف صدادار مجاور نیستند؟

ب)* اولین t در مکان سوم جایگشت قرار دارد و هیچ دو حرف صدادار مجاور نیستند؟

ج) اولین t در مکان سوم و اولین n در مکان پنجم جایگشت قرار دارد؟

د)* اولین t در مکان سوم و دومین n در مکان پنجم جایگشت قرار دارد؟

۱۱) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ insignificance

الف) دومین حرف i در مکان ششم جایگشت آمده است؟

ب) دومین حرف i در مکان ششم جایگشت و سومین حرف n در مکان هشتم جایگشت آمده است؟

ج) سومین حرف صدادار در مکان ششم جایگشت آمده است؟

د)* سومین حرف صدادار در مکان ششم جایگشت آمده و هیچ دو حرف صدادار مجاور نیستند؟

۱۲) الف) چند جایگشت ۱۰ حرفی از حروف کلمهٔ mathematics وجود دارد؟

ب) چند جایگشت ۵ حرفی از حروف این کلمه وجود دارد؟

۱۳) چند جایگشت ۵ حرفی از حروف کلمهٔ mississippi وجود دارد؟

۱۴)* در چند جایگشت ۱۰ حرفی از حروف کلمهٔ mathematics

الف) هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

ب) حروف صدادار مجاورند؟

۱۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi عبارت si دقیقاً دوبار و عبارت sp دقیقاً یک بار آمده است؟

۱۶)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international

الف) هر دو عبارت nt و na وجود دارند؟

ب) هر دو عبارت nt و ta وجود دارند؟

۱۷)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ institutional

الف) اولین حرف t قبل از اولین حرف n قرار دارد و عبارت ti دقیقاً دوبار آمده است؟

ب) هیچ یک از عبارت‌های nt و ni وجود ندارند؟

ج) بین هر دو حرف i حداقل یک حرف n و حداقل یک حرف t قرار دارد؟

۱۸)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ management

الف) هر دو عبارت ma و ne وجود دارند؟

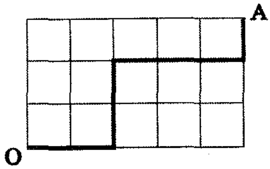
ب) عبارت ma وجود دارد و حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار دارند؟

ج) اولین حرف m قبل از اولین حرف n و چسبیده به آن قرار دارد و عبارت na نیز وجود دارد؟

د) هیچ یک از عبارت‌های mg و gn وجود ندارند؟

۴—۲ مسألهٔ مسیر

یک متحرک در نقطهٔ $O = (\circ, \circ)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. این متحرک در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. در واقع اگر متحرک در نقطهٔ (x, y) قرار داشته باشد، با یک حرکت می‌تواند به یکی از نقاط $(x + ۱, y)$ یا $(x, y + ۱)$ برود. می‌خواهیم ببینیم که این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $A = (m, n)$ برود. برای مثال فرض کنید $m = ۵$ و $n = ۳$. متحرک برای رفتن از نقطهٔ $(\circ, \circ)$ به نقطهٔ $(۵, ۳)$ باید ۸ حرکت انجام دهد که ۵ تای آن به سمت راست و ۳ تای آن به سمت بالاست. اگر هر حرکت به سمت راست را با R و هر حرکت به سمت بالا را با U نشان دهیم، آنگاه به هر مسیر از $(\circ, \circ)$ به $(۵, ۳)$ دنباله‌ای ۸ حرفی شامل ۵ حرف R و ۳ حرف U متناظر می‌شود. مثلاً، به مسیر نشان داده شده در شکل زیر دنبالهٔ $RRUURRRU$ متناظر می‌شود.



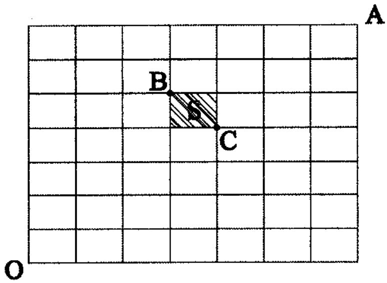
واضح است که هر دنبالهٔ ۸ حرفی متشکل از ۵ حرف R و ۳ حرف U متناظر با دقیقاً یک مسیر از $(\circ, \circ)$ به $(۵, ۳)$ است. پس تعداد مسیرهای از $(\circ, \circ)$ به $(۵, ۳)$ برابر تعداد این دنباله‌ها یعنی برابر $\frac{۸!}{۵!۳!}$ است.

در حالت کلی تعداد مسیرها از نقطهٔ $O = (\circ, \circ)$ به نقطهٔ $A = (m, n)$ با دو حرکت گفته شده برابر $\binom{m+n}{m}$ است.

مسألهٔ ۱.۲.۴ متحرکی در نقطهٔ $O = (\circ, \circ)$ قرار دارد و در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. فرض کنید S مربعی باشد که نقاط $(۳, ۴)$ و $(۴, ۵)$ دو رأس مقابل آن باشند. این متحرک به چند طریق می‌تواند به

نقطهٔ $A = (۷, ۷)$ برود طوری که حداقل از یک رأس S بگذرد؟

راه‌حل. هر مسیری که حداقل از یک رأس S می‌گذرد شامل دقیقاً یکی از دو نقطهٔ $B = (۳, ۵)$ و $C = (۴, ۴)$ است.



تعداد مسیرهای بین O و A که شامل B هستند برابر $\binom{۸}{۵}\binom{۶}{۲}$ و تعداد مسیرهای شامل C برابر $\binom{۸}{۴}\binom{۶}{۳}$ است. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۸}{۵}\binom{۶}{۲} + \binom{۸}{۴}\binom{۶}{۳}$$

مسألهٔ ۲.۲.۴ متحرکی در نقطهٔ $O = (۰, ۰)$ قرار دارد. این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به صورت

$$(x, y) \longmapsto (x + ۱, y), \qquad (x, y) \longmapsto (x + ۱, y + ۱)$$

انجام دهد. این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $A = (۲۰, ۱۳)$ برود؟

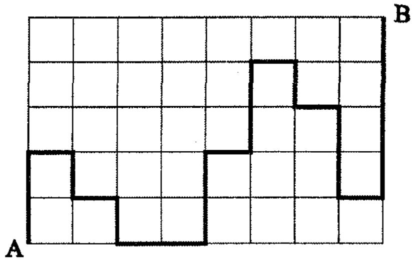
راه‌حل. حرکت‌های گفته شده در صورت مسأله را به ترتیب با R و U نشان می‌دهیم. چون حرکت R متحرک را یک واحد به سمت راست و حرکت U متحرک را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا می‌برد، لذا برای رفتن از O به A متحرک باید ۱۳ حرکت از نوع U و ۷ حرکت از نوع R انجام دهد. پس تعداد مسیرهای از O به A با دو حرکت گفته شده برابر تعداد دنباله‌های ۲۰ حرفی شامل ۷ حرف R و ۱۳ حرف U یعنی برابر $\binom{۲۰}{۷}$ است.

مسألهٔ ۳.۲.۴ متحرکی در نقطهٔ $O = (۰, ۰)$ قرار دارد. این متحرک در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت چپ و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند با انجام دقیقاً ۳۰ حرکت به نقطهٔ $A = (۱۰, ۱۰)$ برود؟

راه‌حل. حرکت‌های به سمت راست، چپ و بالا را به ترتیب با R، L و U نشان می‌دهیم. متحرک برای رفتن به نقطهٔ A با ۳۰ حرکت باید ۱۰ حرکت از نوع U، ۱۵ حرکت از نوع R و ۵ حرکت از نوع L انجام دهد. پس تعداد مسیرهای از O به A که دقیقاً از ۳۰ حرکت تشکیل شده‌اند برابر است با

$$P(۳۰; ۱۵, ۱۰, ۵) = \frac{۳۰!}{۱۵!۱۰!۵!}$$

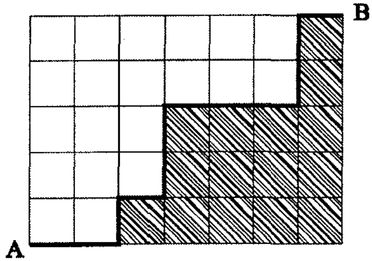
مسألهٔ ۴.۲.۴ متحرکی در نقطهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد. این متحرک در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا و یا یک واحد به سمت پایین حرکت کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ B برود به‌طوری‌که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک بار عبور نکند؟



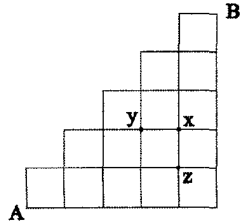
راه‌حل. شبکهٔ داده شده ۸ ستون دارد که هر ستون شامل ٦ پاره‌خط افقی است. متحرک برای رفتن از A به B با حرکت‌های گفته شده باید دقیقاً ۸ حرکت افقی انجام دهد با این ویژگی که از هر ستون شبکه باید دقیقاً از یکی از ٦ پاره‌خط افقی آن ستون عبور کند. پس به $٦^۸$ طریق می‌توان حرکت‌های افقی متحرک را تعیین کرد و به‌ازای هر طریق انتخاب این حرکت‌ها، حرکت‌های عمودی متحرک به صورت یکتا مشخص می‌شوند. لذا پاسخ مسأله برابر $٦^۸$ است.

مسألهٔ ۵.۲.۴ به چند طریق می‌توان هر خانه از یک شبکهٔ ۷ × ۵ را به رنگ سیاه یا سفید درآورد به‌طوری‌که برای هر خانهٔ سیاه خانهٔ سمت راست و خانهٔ پایین این خانه (در صورت وجود) نیز سیاه باشند؟

راه‌حل. برای هر رنگ‌آمیزی با ویژگیهای گفته شده، مرز مشترک بین خانه‌های سیاه و سفید شبکه یک مسیر بین نقاط A و B است که هر حرکت آن یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالاست. برعکس برای هر مسیر بین A و B با این دو نوع حرکت چنان‌چه خانه‌های واقع در زیر مسیر را به رنگ سیاه درآوریم به یک رنگ‌آمیزی مطلوب می‌رسیم. لذا تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی برابر تعداد مسیرهای بین A و B یعنی برابر $\binom{12}{5}$ است.

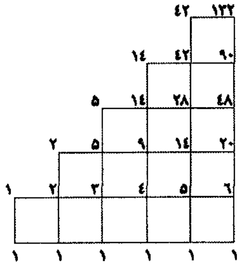


مسألهٔ ٦.۲.۴ فردی در نقطهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد و در هر مرحله می‌تواند روی خطوط شبکه یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این فرد به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ B برود؟



راه‌حل. برای هر سه نقطه از شبکه مانند X، Y و Z به‌طوری‌که نقاط Y و Z به ترتیب نقاط سمت چپ و پایین X باشند، اگر تعداد مسیرها از نقطهٔ A به نقاط Y و Z به ترتیب برابر y و z

باشد، آنگاه تعداد مسیرها از نقطهٔ A به نقطهٔ X برابر $z + y$ است. با توجه به این نکته می‌توانیم با شروع از نقطهٔ A، روی هر نقطه تعداد مسیرهای بین A و این نقطه را بنویسیم.



پس در این شبکه ۱۳۲ مسیر از A به B وجود دارد.

مسائل

۱) متحرکی در نقطهٔ $(۰, ۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد و در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۱۵, ۱۲)$ برود به‌طوری‌که

الف) از نقطهٔ $(۵, ۷)$ بگذرد؟

ب)* از نقطه‌های $(۵, ۴)$ و $(۱۱, ۷)$ بگذرد؟

ج) از هیچ یک از نقطه‌های $(۹, ۷)$ و $(۵, ۱۱)$ نگذرد؟

د) دقیقاً از یکی از نقاط $(۶, ۴)$ و $(۱۲, ۹)$ بگذرد؟

۲) متحرکی در نقطهٔ $O = (۰, ۰)$ قرار دارد. این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به صورت

$$(x, y) \longmapsto (x + ۱, y - ۱), \quad (x, y) \longmapsto (x + ۱, y + ۱)$$

انجام دهد.

الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۲۰,۴)$ برود؟

ب) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۲۰,۴)$ برود به‌طوری‌که از نقطهٔ $(۱-,۹)$ بگذرد؟

۳) متحرکی در نقطهٔ $O=(۰,۰)$ قرار دارد. این متحرک از نقطهٔ (x,y) می‌تواند به یکی از نقاط $(x+۱,y)$، $(x,y+۱)$، $(x-۱,y)$ و $(x,y-۱)$ برود. این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۱۰,۱۰)$ برود به‌طوری‌که

الف) دقیقاً ۲۰ حرکت انجام دهد؟

ب) دقیقاً ۲۲ حرکت انجام دهد؟

ج)* دقیقاً ۲۲ حرکت انجام دهد و از هیچ نقطه‌ای دوبار عبور نکند؟

د) دقیقاً ۲۴ حرکت انجام دهد؟

۴)* متحرکی در گوشهٔ سمت چپ و پایین یک صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ قرار دارد. این متحرک در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست، یک واحد به سمت بالا، یک واحد به سمت چپ و یا یک واحد به سمت پایین برود (توجه کنید که متحرک از صفحهٔ شطرنجی نمی‌تواند خارج شود). این متحرک به چند طریق می‌تواند به گوشهٔ سمت راست و بالای صفحهٔ شطرنجی برود به‌طوری‌که

الف) دقیقاً ۱۸ حرکت انجام دهد؟

ب) دقیقاً ۱۸ حرکت انجام دهد و از هیچ نقطه‌ای دوبار عبور نکند؟

ج) دقیقاً ۲۰ حرکت انجام دهد؟

۵) فردی در گوشهٔ سمت چپ و پایین یک صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ قرار دارد. این فرد در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست، یک واحد به سمت بالا و یا یک واحد به سمت پایین حرکت کند.

الف) این فرد به چند طریق می‌تواند به گوشهٔ سمت راست و بالای صفحهٔ شطرنجی برود به‌طوری‌که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک بار عبور نکند؟

ب) طول چند مسیر از مسیرهای قسمت (الف) برابر ۱۸ است؟

٦) متحرکی در نقطهٔ $O = (\circ, \circ, \circ)$ قرار دارد. این متحرک می‌تواند سه نوع حرکت به صورت

$$(x, y, z) \longmapsto (x+1, y, z), \quad (x, y, z) \longmapsto (x, y+1, z), \quad (x, y, z) \longmapsto (x, y, z+1)$$

انجام دهد.

الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(8, 10, 12)$ برود؟

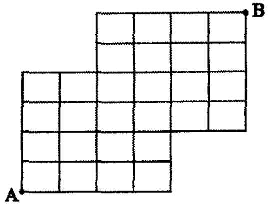
ب) چند مسیر از مسیرهای قسمت (الف) از نقطهٔ $(5, 4, 8)$ می‌گذرد؟

۷) متحرکی در نقطهٔ $O = (\circ, \circ, \circ)$ قرار دارد. این متحرک از نقطهٔ (x, y, z) می‌تواند به یکی از نقاط $(x + 1, y - 1, z)$، $(x, y, z + 1)$ و $(x, y + 1, z - 1)$ برود.

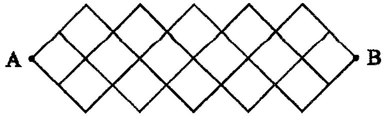
الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(5, -7, 10)$ برود؟

ب) چند مسیر از مسیرهای قسمت (الف) از نقطهٔ $(1, -2, 3)$ می‌گذرد؟

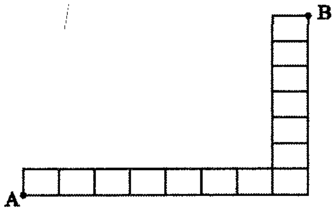
۸) فردی در نقطهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد. این فرد در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این فرد به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ B برود؟



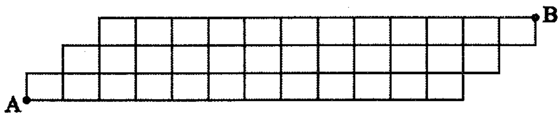
۹) فردی در نقطهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد. این فرد به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ B برود به‌طوری‌که در هر مرحله فقط به سمت جلو حرکت کند؟



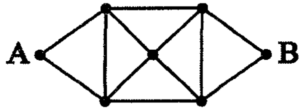
۱۰)* فردی در نقطهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد. این فرد در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست، یک واحد به سمت بالا، یک واحد به سمت چپ و یا یک واحد به سمت پایین حرکت کند. این فرد به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ B برود به‌طوری‌که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک بار عبور نکند؟



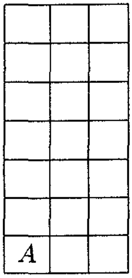
۱۱) فردی در نقطهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد. این فرد در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این فرد به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ B برود؟



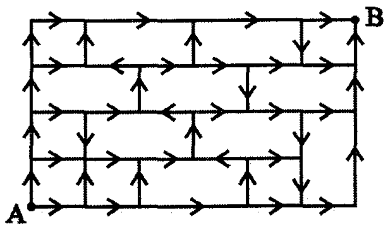
۱۲) در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم با شروع از رأس A و حرکت روی پاره‌خط‌ها به رأس B برویم به‌طوری‌که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک بار عبور نکنیم؟ (المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۲)



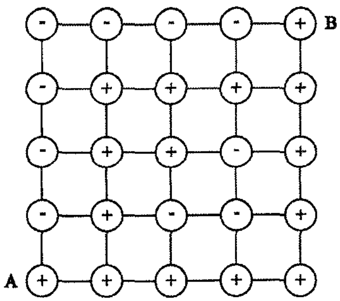
۱۳)* فردی در خانهٔ A از شبکهٔ شکل زیر قرار دارد. این فرد در هر مرحله می‌تواند از یک خانه به یکی از خانه‌های ردیف بالاتر که حداقل یک رأس مشترک با آن دارند برود. این فرد به چند طریق می‌تواند به یکی از خانه‌های ردیف بالای شبکه برود؟



۱۴)* در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم به شرطی که فقط در جهت فلش‌ها حرکت کنیم؟ (مرحله اول المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۴)



۱۵)* در شکل زیر چند مسیر به طول ۸ از A به B وجود دارد که تعداد زوجی علامت منفی داشته باشد؟ (مرحله اول المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۲)



۱۶) در برکه‌ای ۱۰ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شمارهٔ ۱ نشسته است. قورباغه از روی سنگ شمارهٔ i به روی هر یک از سنگ‌های شماره‌های $i+1$ تا $2i$ می‌تواند بپرد. این قورباغه به چند طریق می‌تواند به سنگ شمارهٔ ۱۰ برود؟

۴—۳ بسط چندجمله‌ای

مجموع چند متغیر مختلف مانند $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ را یک چندجمله‌ای می‌نامند. بسط چندجمله‌ای فرمولی برای محاسبهٔ توان‌های چندجمله‌ای است. با توجه به تساوی

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \cdots + x_k)\cdots(x_1 + \cdots + x_k)}_{n \text{ بار}}$$

نتیجه می‌گیریم هر جمله از بسط $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ به صورت $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ است که در آن n_1، n_2، ... و n_k اعداد صحیح و نامنفی هستند و $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

قضیهٔ ۱.۳.۴ (قضیهٔ چندجمله‌ای) فرض کنید n عددی طبیعی باشد و n_1، n_2، ... و n_k اعداد صحیح و نامنفی باشند که $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. در این صورت ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ در بسط $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ برابر است با

$$P(n; n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$$

برهان.

روش اول. برای به‌دست آوردن ضریب جملهٔ $x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}$ در بسط $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ باید ببینیم این جمله را به چند طریق می‌توانیم در حاصل‌ضرب

$$\underbrace{(x_1 + \cdots + x_k)\cdots(x_1 + \cdots + x_k)}_{n \text{ بار}}$$

تولید کنیم. برای تولید چنین جمله‌ای ابتدا n_1 تا از n پرانتز را انتخاب می‌کنیم و از هر یک از این پرانتزها متغیر x_1 را انتخاب می‌کنیم، سپس n_2 تا از $n - n_1$ پرانتز باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و از هر یک متغیر x_2 را انتخاب می‌کنیم و .... پس ضریب $x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}$ در این حاصل‌ضرب برابر است با

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}\\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\times\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\times\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\times\cdots\\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}
\end{aligned}$$

روش دوم. در حاصل‌ضرب

$$\underbrace{(x_1+\cdots+x_k)\cdots(x_1+\cdots+x_k)}_{\text{بار } n}$$

هر دنبالهٔ (مرتب) به طول n که هر جملهٔ آن برابر x_1، x_2، ... یا x_k باشد دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. پس ضریب $x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}$ در بسط $(x_1+\cdots+x_k)^n$ برابر تعداد دنباله‌های به طول n است که n_1 جملهٔ آن‌ها x_1، n_2 جملهٔ آن‌ها x_2، ... و n_k جملهٔ آن‌ها x_k است. تعداد این دنباله‌ها نیز برابر $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ است.

مثال ۲.۳.۴ بسط $(x+y+z)^3$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= \frac{3!}{3!0!0!}x^3+\frac{3!}{2!1!0!}x^2y+\frac{3!}{2!0!1!}x^2z+\frac{3!}{1!2!0!}xy^2\\
&+\frac{3!}{1!1!1!}xyz+\frac{3!}{1!0!2!}xz^2+\frac{3!}{0!3!0!}y^3+\frac{3!}{0!2!1!}y^2z\\
&+\frac{3!}{0!1!2!}yz^2+\frac{3!}{0!0!3!}z^3\\
&= x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+y^3+3y^2z\\
&+3yz^2+z^3
\end{aligned}$$

مسألهٔ ۳.۳.۴ ضریب $x^{۲}y^{۳}zw^{۴}$ در بسط $(۳x - ۲y + z - ۵w)^{۱۰}$ چند است؟

راه‌حل. جملهٔ عمومی بسط داده شده به صورت

$$\frac{۱۰!}{a!b!c!d!}(۳x)^a(-۲y)^b z^c(-۵w)^d$$

است که در آن a، b، c و d اعداد صحیح و نامنفی هستند که $a + b + c + d = ۱۰$. به‌ازای $a = ۲$، $b = ۳$، $c = ۱$ و $d = ۴$ جملهٔ $x^{۲}y^{۳}zw^{۴}$ به‌دست می‌آید که ضریب آن برابر $-\frac{۱۰!}{۲!۳!۴!} \times ۳^{۲} \times ۲^{۳} \times ۵^{۴}$ است.

مسألهٔ ۴.۳.۴ ضریب $x^{۱۱}$ در بسط $(۱ + x^{۲} + x^{۳})^{۱۷}$ چند است؟

راه‌حل. جملهٔ عمومی بسط داده شده به صورت

$$\frac{۱۷!}{a!b!c!} \times ۱^a \times (x^{۲})^b \times (x^{۳})^c = \frac{۱۷!}{a!b!c!}x^{۲b+۳c}$$

است که در آن a، b و c اعداد صحیح و نامنفی هستند که $a+b+c = ۱۷$. چنان‌چه (a, b, c) برابر هر یک از $(۱۳, ۱, ۳)$ و $(۱۲, ۴, ۱)$ باشد جملهٔ $x^{۱۱}$ به‌دست می‌آید. لذا ضریب $x^{۱۱}$ در این بسط برابر است با

$$\frac{۱۷!}{۱۲!۴!} + \frac{۱۷!}{۱۳!۳!}$$

مسائل

۱) ضریب $x_۱^۲x_۲x_۴^۳x_۵$ در بسط $(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵)^۷$ چند است؟

۲) ضریب $x_۱^۳x_۲x_۳^۲$ در بسط $(۲x_۱ - ۳x_۲ + ۵x_۳)^۶$ چند است؟

۳) ضریب $x^۹$ در بسط $(۱ + x^۲ - x^۳)^۷$ چند است؟

۴) ضریب جملات x^{17}، x^{18} و x^{19} را در بسط $(1 + x^4 + x^7)^{20}$ بیابید.

۵)* فرض کنید a_k، $0 \leq k \leq 2n$، ضریب x^k در بسط $(1 + x + x^2)^n$ باشد.

الف) به‌ازای هر k، $0 \leq k \leq n$، ثابت کنید $a_{n+k} = a_{n-k}$.

ب) ثابت کنید

$$a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \cdots - a_{2n-1} a_{2n} = 0$$

ج) از تساوی

$$(1 + x + x^2)(1 - x + x^2) = 1 + x^2 + x^4$$

استفاده کرده و ثابت کنید

$$a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2 = \frac{1}{2}(a_n + (-1)^{n+1} a_n^2)$$

د) ثابت کنید حاصل عبارت

$$\binom{n}{0} a_r - \binom{n}{1} a_{r-1} + \binom{n}{2} a_{r-2} - \cdots + (-1)^r \binom{n}{r} a_0$$

وقتی که r مضرب ۳ نیست برابر صفر و وقتی که $r = 3s$ برابر $(-1)^s \binom{n}{s}$ است.

۶) فرض کنید n_1، n_2، ... و n_k عددهایی طبیعی باشند و $n = n_1 + \cdots + n_k$. از تساوی

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_k)^n &= x_1(x_1 + \cdots + x_k)^{n-1} + x_2(x_1 + \cdots + x_k)^{n-1} \\ &\quad + \cdots + x_k(x_1 + \cdots + x_k)^{n-1}\end{aligned}$$

استفاده کرده و ثابت کنید

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} &= \frac{(n-1)!}{(n_1 - 1)! n_2! \cdots n_k!} + \frac{(n-1)!}{n_1!(n_2 - 1)! n_3! \cdots n_k!} \\ &\quad + \cdots + \frac{(n-1)!}{n_1! \cdots n_{k-1}!(n_k - 1)!}\end{aligned}$$

۷) الف) فرض کنید n_1، n_2، ... و n_k عددهایی صحیح و نامنفی باشند، $n = n_1 + \cdots + n_k$ و $n_1 \geq n_2 + 2$. ثابت کنید

$$\frac{n!}{(n_1 - 1)!(n_2 + 1)!n_3!\cdots n_k!} > \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$

ب) بزرگترین ضریب بسط $(x_1 + x_2 + x_3)^{12}$ چند است؟

ج) بزرگترین ضریب بسط $(x_1 + x_2 + x_3)^{14}$ چند است؟

د) بزرگترین ضریب بسط $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{14}$ چند است؟

فصل ۵

ترکیب‌های با تکرار

در فصل ۳ مسألهٔ ترکیب‌های اشیاء متمایز را مطالعه کردیم. در این فصل به بررسی ترکیب‌های اشیائی که در بین آن‌ها شیء تکراری هم وجود دارد می‌پردازیم.

۵—۱ معادله‌های خطی با ضرایب واحد

یک معادلهٔ خطی با ضرایب واحد، مثلاً معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم این معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد. روش متداول برای به‌دست آوردن تعداد جواب‌های معادله‌های خطی با ضرایب واحد روش توپ و دیوار است.

چند جواب از معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی عبارتند از

$$x_۱ = ۱, \quad x_۲ = ۳, \quad x_۳ = ۳, \quad x_۴ = ۲$$

$$x_۱ = ۳, \quad x_۲ = ۳, \quad x_۳ = ۲, \quad x_۴ = ۱$$

$$x_۱ = ۴, \quad x_۲ = ۱, \quad x_۳ = ۱, \quad x_۴ = ۳$$

به هر جواب از این معادله می‌توانیم دنباله‌ای از ۹ توپ و ۳ دیوار متناظر کنیم، به این صورت که ابتدا $x_۱$ توپ در یک ردیف قرار می‌دهیم و بعد از آن یک دیوار، در ادامهٔ آن $x_۲$ توپ قرار می‌دهیم و بعد یک دیوار، در ادامه $x_۳$ توپ قرار می‌دهیم و بعد یک دیوار و در نهایت $x_۴$ توپ

در انتهای این ردیف قرار می‌دهیم. مثلاً دنباله‌های متناظر با سه جواب داده شده عبارتند از

○ ○ | ○ ○ ○ | ○ ○ ○ | ○

○ | ○ ○ | ○ ○ ○ | ○ ○ ○

○ ○ ○ | ○ | ○ | ○ ○ ○ ○

با توجه به این نکته تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر تعداد راه‌های قرار دادن ۳ دیوار در ۳ مکان از ۸ فضای خالی ایجاد شده بین ۹ توپ یعنی برابر $\binom{8}{3}$ است. به طور کلی تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر تعداد راه‌های قرار دادن $k - 1$ دیوار در $k - 1$ مکان از $n - 1$ فضای خالی ایجاد شده بین n توپ است.

قضیهٔ ۱.۱.۵ تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است.

اکنون می‌خواهیم بدانیم که یک معادلهٔ خطی با ضرایب واحد در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی چند جواب دارد. چند جواب دیگر را از معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ در نظر بگیرید که در هر یک برخی از x_i ها برابر صفر باشند. مثلاً جواب‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 5$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0$$

دنباله‌های متناظر با این سه جواب عبارتند از

○ ○ ○ ○ ○ | | ○ ○ ○ ○ |

○ ○ | | | ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

| ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که هر دنباله متشکل از ۹ توپ و ۳ دیوار متناظر با جوابی از معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است. لذا تعداد

جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\frac{۱۲!}{۹!۳!}$ است. به طور کلی تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر تعداد دنباله‌های متشکل از n توپ و $k - ۱$ دیوار است.

قضیهٔ ۲.۱.۵ تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است.

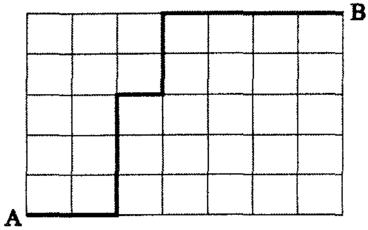
مسألهٔ ۳.۱.۵ در بسط $(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴)^{۱۹}$ چند جملهٔ متمایز وجود دارد؟

راه‌حل. هر جمله از بسط داده شده به صورت $x_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}x_۳^{n_۳}x_۴^{n_۴}$ است که در آن n_i ها اعداد صحیح و نامنفی‌اند و $n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴ = ۱۹$. پس تعداد جملات متمایز بسط برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴ = ۱۹$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{۲۲}{۳}$ است.

مسألهٔ ۴.۱.۵ فردی در گوشهٔ سمت چپ و پایین یک شبکهٔ ۷×۵ قرار دارد. این فرد در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این فرد به چند طریق می‌تواند خود را به گوشهٔ سمت راست و بالای شبکه برساند به‌طوری‌که دقیقاً در ۴ نقطه تغییر جهت دهد؟

راه‌حل. ابتدا فرض کنید که این فرد در حرکت اول به سمت راست برود. اگر این فرد در طی مسیر دقیقاً در ۴ نقطه تغییر جهت دهد، در این صورت همان گونه که از شکل زیر پیداست این فرد ابتدا چند حرکت افقی، سپس چند حرکت عمودی، بعد از آن چند حرکت افقی، در ادامه

چند حرکت عمودی و در نهایت چند حرکت افقی انجام داده است.



فرض کنید این فرد در سه مرحله‌ای که به صورت افقی حرکت کرده است به ترتیب x_1، x_2 و x_3 حرکت انجام داده باشد و در دو مرحله‌ای که به صورت عمودی حرکت کرده است به ترتیب y_1 و y_2 حرکت انجام داده باشد. در این صورت چون این فرد در مجموع ۷ حرکت افقی و ۵ حرکت عمودی انجام داده است، لذا

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ y_1 + y_2 = 5 \end{cases}$$

تعداد جواب‌های این دستگاه در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر $\binom{4}{1}\binom{6}{2}$ است، پس چنان‌چه فرد در حرکت اول به سمت راست برود به $\binom{4}{1}\binom{6}{2}$ طریق می‌تواند خود را به گوشه سمت راست و بالای شبکه برساند به‌طوری‌که دقیقاً در ۴ نقطه تغییر جهت دهد. به طور مشابه تعداد مسیرهای مطلوبی که حرکت اول آن‌ها به سمت بالا باشد برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 7 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 5 \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{4}{2}\binom{6}{1}$ است. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{1}\binom{4}{2} = 96$$

مسألهٔ ۵.۱.۵ ۱۴ نفر در یک ردیف ایستاده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد طوری که بین هر دو فرد انتخاب شده حداقل دو نفر دیگر قرار داشته باشند؟

راه‌حل. یکی از روش‌های مطلوب انتخاب سه نفر را در نظر بگیرید و فرض کنید تعداد افراد قبل از اولین فرد انتخاب شده برابر x_1، تعداد افراد بین اولین و دومین فرد انتخاب شده برابر x_2، تعداد افراد بین دومین و سومین فرد انتخاب شده برابر x_3 و تعداد افراد بعد از سومین فرد انتخاب شده برابر x_4 باشد. در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.

$$\mathbf{x}_1 \ \text{①} \ \mathbf{x}_2 \ \text{②} \ \mathbf{x}_3 \ \text{③} \ \mathbf{x}_4$$

با توجه به شرایط مسأله می‌توان نتیجه گرفت

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 2, \quad x_4 \geq 0$$

پس پاسخ مسأله برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با ۴ شرط فوق است. فرض کنید

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - 2, \quad y_3 = x_3 - 2, \quad y_4 = x_4$$

اگر $x_1+x_2+x_3+x_4 = 11$، آنگاه $y_1+y_2+y_3+y_4 = 7$ و اگر $x_1, x_4 \geq 0$ و $x_2, x_3 \geq 2$، آنگاه $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$. پس تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 2, \quad x_4 \geq 0$$

برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$ در مجموعهٔ اعداد ضحیح و نامنفی است. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{10}{3}$ است.

قضیهٔ ۶.۱.۵ فرض کنید c_1، c_2، ... و c_k اعدادی صحیح باشند. در این صورت تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح، با شرایط

$$x_1 \geq c_1, \quad x_2 \geq c_2, \quad \ldots, \quad x_k \geq c_k$$

برابر $\binom{n+k-1-c_1-c_2-\cdots-c_k}{k-1}$ است.

برهان. فرض کنید

$$y_1 = x_1 - c_1, \quad y_2 = x_2 - c_2, \quad \cdots, \quad y_k = x_k - c_k$$

در این صورت اگر $x_1 + \cdots + x_k = n$، آنگاه

$$y_1 + \cdots + y_k = n - c_1 - c_2 - \cdots - c_k$$

و اگر x_i ها در شرایط قضیه صدق کنند، آنگاه هر y_i عددی صحیح و نامنفی است. پس تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط گفته شده در صورت قضیه برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$y_1 + \cdots + y_k = n - c_1 - c_2 - \cdots - c_k$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{n+k-1-c_1-c_2-\cdots-c_k}{k-1}$ است.

مسألهٔ ۷.۱.۵ در چند عدد چهاررقمی مجموع ارقام برابر ۸ است؟

راه‌حل. فرض کنید مجموع ارقام عدد چهاررقمی $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ برابر ۸ باشد، در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ و

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

تعداد جواب‌های معادلهٔ فوق با این ۴ شرط برابر $\binom{10}{3}$ است، لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{10}{3}$ است.

مسألهٔ ۸.۱.۵ ۲۰ مهرهٔ متمایز را به چند طریق می‌توان در سه میلهٔ مختلف قرارداد به‌طوری‌که در هر میله حداقل دو مهره قرار گیرد؟

راه‌حل. فرض کنید تعداد مهره‌های سه میله به ترتیب برابر x_1، x_2 و x_3 باشد، در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 = 20$. تعداد جواب‌های این معادله با شرایط

$$x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 2$$

برابر $\binom{16}{2}$ است. حال به‌ازای هر جواب از این معادله به $20!$ طریق می‌توان مهره‌ها را در میله‌ها قرارداد. پس پاسخ مسأله برابر $20! \times \binom{16}{2}$ است.

مسألهٔ ۹.۱.۵ چند سه‌تایی مرتب از اعداد صحیح مانند (a,b,c) وجود دارد که $abc = 2^{10} \times 3^{12}$؟

راه‌حل. فرض کنید

$$a = \pm 2^{x_1} \times 3^{y_1}, \quad b = \pm 2^{x_2} \times 3^{y_2}, \quad c = \pm 2^{x_3} \times 3^{y_3}$$

در این صورت اگر $abc = 2^{10} \times 3^{12}$، آنگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 12 \end{cases}$$

تعداد جواب‌های این دستگاه در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{14}{2}\binom{12}{2}$ است. همچنین به‌ازای هر انتخاب از علامت‌های a و b، علامت c به صورت یکتا مشخص می‌شود، لذا پاسخ مسأله برابر $2^2 \times \binom{14}{2}\binom{12}{2}$ است.

۵—۲ ترکیب‌های با تکرار

در یک گل‌فروشی از هر یک از گل‌های رز، مریم، لاله و شقایق تعداد زیادی شاخه وجود دارد. می‌خواهیم ۱۰ شاخهٔ گل از این گل‌فروشی بخریم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

در این‌جا نیز با مسأله ترکیب (انتخاب) روبرو هستیم با این تفاوت که می‌توانیم شیء تکراری نیز انتخاب کنیم. فرض کنید از ۴ نوع گل موجود در گل‌فروشی به ترتیب x_1، x_2، x_3 و x_4 شاخه بخریم، در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. پس تعداد راه‌های

انتخاب ۱۰ شاخهٔ گل ازاین ۴ نوع گل برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ فوق در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{۱۳}{۳}$ است.

در حالت کلی تعداد راه‌های انتخاب n شیء از k نوع شیء (به شرط آن که تعداد اشیاء از هر نوع به اندازهٔ کافی باشد) برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$x_۱ + \cdots + x_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است.

قضیهٔ ۱.۲.۵ تعداد راه‌های انتخاب n شیء از k نوع شیء برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است.

مسألهٔ ۲.۲.۵ در چند عدد ۱۵ رقمی ارقام از چپ به راست به صورت صعودی هستند؟

راه‌حل. برای ساخت یک عدد با ویژگی گفته شده کافی است ۱۵ رقم عدد را انتخاب کنیم و این ارقام را به صورت صعودی از چپ به راست مرتب کنیم. پس پاسخ برابر تعداد راه‌های انتخاب ۱۵ رقم از بین ۹ نوع رقم (ارقام از ۱ تا ۹) یعنی برابر $\binom{۲۳}{۸}$ است.

مسألهٔ ۳.۲.۵ در چند جایگشت از حروف کلمه mississippi عبارت si وجود ندارد؟

راه‌حل. ابتدا همهٔ حروف غیر از ۴ حرف s را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $\frac{۷!}{۴!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال ۴ حرف s را طوری بین بقیهٔ حروف قرار می‌دهیم که عبارت si به‌وجود نیاید. چون ۴ حرف i وجود دارد، لذا حروف s را در ۴ مکان از ۸ مکان ایجاد شده بین ۷ حرف نمی‌توان قرارداد.

$$m \times i \times i \times ipp \times i$$

پس ۴ مکان مجاز برای ۴ حرف s وجود دارد و البته در هر یک از این مکان‌ها می‌توانیم بیش از یک حرف s قرار دهیم. پس تعداد راه‌های قراردادن ۴ حرف s در این ۴ مکان برابر تعداد

راه‌های انتخاب ۴ شیء از ۴ نوع شیء یعنی برابر $\binom{۷}{۳}$ است. لذا پاسخ مسأله برابر $\binom{۷}{۳} \times \frac{۷!}{۴!۲!}$ است.

مسألهٔ ۴.۲.۵ در یک کیسه توپ‌هایی با شماره‌های ۱، ۲، ... و ٦ وجود دارد (توپ‌های هم شماره یکسانند و از هر شماره به تعداد زیادی توپ وجود دارد). به چند طریق می‌توان ۸ توپ از کیسه انتخاب کرد به‌طوری‌که مجموع اعداد روی آن‌ها زوج باشد؟

راه‌حل. چون ۳ نوع توپ با شمارهٔ زوج و ۳ نوع توپ با شمارهٔ فرد وجود دارد، لذا تعداد راه‌های انتخاب n توپ با شماره‌های زوج برابر $\binom{n+۲}{۲}$ و تعداد راه‌های انتخاب $۸ - n$ توپ با شماره‌های فرد برابر $\binom{۱۰-n}{۲}$ است. در صورتی مجموع اعداد روی ۸ توپ انتخاب شده زوج است که n زوج باشد. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۲}{۲}\binom{۱۰}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۸}{۲} + \binom{٦}{۲}\binom{٦}{۲} + \binom{۸}{۲}\binom{۴}{۲} + \binom{۱۰}{۲}\binom{۲}{۲} = ٦۵۱$$

مسألهٔ ۵.۲.۵ در چند جایگشت ازحروف کلمهٔ intervention هیچ یک از عبارت‌های ne و en وجود ندارند؟

راه‌حل. ابتدا همهٔ حروف غیر از حروف n را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $\frac{۹!}{۲!۲!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم که در $\frac{۸!}{۲!۲!}$ حالت دو حرف e مجاورند. حال ۳ حرف n را طوری بین بقیه حروف قرار می‌دهیم که هیچ یک از عبارت‌های ne و en به‌وجود نیایند. در حالتی که دو حرف e مجاور باشند ۷ مکان و در حالتی که این دو حرف غیرمجاور باشند ٦ مکان مجاز برای حروف n وجود دارد و البته در هر یک از این مکان‌ها می‌توانیم بیش از یک حرف n قرار دهیم. در حالت اول $\binom{۹}{٦}$ انتخاب و در حالت دوم $\binom{۸}{۵}$ انتخاب برای ۳ حرف n وجود دارد. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۸!}{۲!۲!} \times \binom{۹}{٦} + \left(\frac{۹!}{۲!۲!۲!} - \frac{۸!}{۲!۲!}\right) \times \binom{۸}{۵}$$

مسائل

۱) معادلهٔ $x+y+z+w=۲۰$

الف) در مجموعهٔ اعداد طبیعی

ب) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی

ج) در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x \geq ۲, \quad y \geq ۵, \quad z \geq -۱, \quad w \geq ۳$$

چند جواب دارد؟

۲) دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۱۵ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۳) در چند عدد ۴ رقمی مجموع ارقام برابر

الف) ۹

ب) ۱۰

ج) ۱۱

است؟

۴) به‌ازای چند سه‌تایی مرتب از اعداد صحیح مانند (a,b,c)

الف) $abc = ۳^{۱۲}$

ب) $abc = ۳^{۱۲} \times ۵^{۱۷}$

ج) $abc = ۳^{۱۲} \times ۵^{۱۷} \times ۷^{۹}$؟

۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi عبارت sp وجود ندارد؟

٦) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international حرف r با هیچ حرف صداداری مجاور نیست؟

۷) یک سینما چهار گیشهٔ فروش بلیط برای چهار فیلم مختلف دارد. ۴۰ نفر به چند طریق می‌توانند جلوی این گیشه‌ها به صف بایستند؟

۸)* در چند کلمهٔ ۲۰ حرفی با حروف a و b

الف) عبارت ab دقیقاً سه‌بار و عبارت ba دقیقاً دوبار آمده است؟

ب) هر یک از عبارت‌های ab و ba دقیقاً سه‌بار آمده‌اند؟

ج) عبارت ab دقیقاً سه‌بار آمده است؟

۹)* در چند کلمهٔ ۲۰ حرفی با ۱۲ حرف a و ۸ حرف b

الف) عبارت ab دقیقاً سه‌بار و عبارت ba دقیقاً دوبار آمده است؟

ب) هر یک از عبارت‌های ab و ba دقیقاً سه‌بار آمده‌اند؟

ج) عبارت ab دقیقاً سه‌بار آمده است؟

د) عبارت aa دقیقاً ۹ بار آمده است؟

۱۰)* در چند کلمهٔ ۳۰ حرفی با ۱۲ حرف a، ۱۰ حرف b و ۸ حرف c

الف) عبارت aa دقیقاً ۹ بار آمده است؟

ب) عبارت aa دقیقاً ۹ بار آمده است و هیچ دو حرف c مجاور نیستند؟

ج) عبارت ab دقیقاً سه‌بار آمده است؟

د) عبارت ab دقیقاً سه‌بار و عبارت ac دقیقاً دوبار آمده است؟

ه) بین هر دو حرف c حداقل یک حرف a وجود دارد؟

۱۱) ۴۰ نفر در یک ردیف ایستاده‌اند. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به‌طوری‌که بین هر دو فرد انتخاب شده حداقل سه نفر دیگر قرار داشته باشند؟

۱۲)* ۴۰ نفر دور یک میز نشسته‌اند. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به‌طوری‌که بین هر دو فرد انتخاب شده حداقل سه نفر دیگر قرار داشته باشند؟

۱۳) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ potentiation بین هر دو حرف t حداقل دو حرف دیگر قرار دارد؟

۱۴) الف) در بسط $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۱۰})^{۳۰}$ چند جملهٔ متمایز وجود دارد؟

ب) در چند جمله از این بسط هر سه متغیر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ وجود دارند؟

۱۵) نامعادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۲۰$

الف) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی

ب) در مجموعهٔ اعداد طبیعی

ج) در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱ \geq -۱, \quad x_۲ \geq ۳, \quad x_۳ \geq ۲, \quad x_۴ \geq ۲$$

چند جواب دارد؟

۱۶) در چند عدد ۴ رقمی مجموع ارقام از ۸ بیشتر نیست؟

۱۷) دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۵ \\ x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۷ \leq ۲۰ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱۸) معادلهٔ $۲x_۱ + x_۲ + ۳ + x_۴ = ۹$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱۹) در چند عدد ۱۵ رقمی ارقام از چپ به راست نزولی هستند؟

۲۰) در چند کلمهٔ ۱۲ حرفی با حروف الفبای انگلیسی حروف از چپ به راست به ترتیب الفبایی قرار دارند؟

۲۱)* در چند جایگشت از حروف کلمهٔ institutional

الف) عبارت it وجود ندارد؟

ب) هیچ یک از عبارت‌های nt و tn وجود ندارند؟

ج) هیچ یک از عبارت‌های it و ti وجود ندارند؟

د) حرف s با هیچ یک از حروف i و t مجاور نیست؟

ه) حرف n با هیچ یک از حروف صدادار مجاور نیست؟

و) حرف t با هیچ یک از حروف صدادار مجاور نیست؟

ز) بین هر دو حرف t حداقل دو حرف صدادار وجود دارد؟

۲۲) متحرکی در نقطهٔ $O = (۰, ۰)$ قرار دارد. این متحرک در هر مرحله می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند.

الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۱۵, ۱۲)$ برود به‌طوری‌که دقیقاً در ۵ نقطه تغییر جهت دهد؟

ب) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطه‌ای از خط $x + y = ۲۰$ برود به‌طوری‌که دقیقاً در ۶ نقطه تغییر جهت دهد؟

۵—۳ توزیع اشیاء یکسان در دسته‌های متمایز

بسیاری از مسائل شمارشی را می‌توان برحسب تعداد راه‌های توزیع اشیاء در دسته‌ها بیان کرد. مسألهٔ توزیع اشیاء یکسان در دسته‌های متمایز ارتباطی مستقیم با معادله‌های خطی با ضرایب واحد دارد.

قضیهٔ ۱.۳.۵ تعداد راه‌های توزیع n شیء یکسان در k دستهٔ متمایز برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است.

برهان. چون دسته‌ها متمایزند، لذا آن‌ها را می‌توانیم با شماره‌های ۱، ۲، ... و k نشان دهیم. توزیعی از n شیء در این k دسته در نظر بگیرید و فرض کنید در دستهٔ i ام x_i شیء قرار گرفته باشد، $i = ۱, \ldots, k$. در این صورت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

و هر یک از x_i ها عددی صحیح و نامنفی است. پس تعداد راه‌های توزیع برابر تعداد جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است.

مسألهٔ ۲.۳.۵ ۲۵ سکهٔ ۱۰۰ ریالی را به چند طریق می‌توان بین ۷ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که فقط به ۴ نفر سکه برسد؟

راه‌حل. ابتدا ۴ نفر از ۷ نفر را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۷}{۴}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال تعداد راه‌های توزیع ۲۵ سکه بین این ۴ نفر به‌طوری‌که به هر یک حداقل یک سکه برسد برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۲۵$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{۲۴}{۳}$ است. پس پاسخ مسأله برابر $\binom{۲۴}{۳}\binom{۷}{۴}$ است.

مسأله ۳.۳.۵ به چند طریق می‌توان ۱۰ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ قرمز را بین ۴ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداقل یک مهره برسد؟

راه‌حل. ابتدا ۲ مهرهٔ قرمز را بین افراد توزیع می‌کنیم. در $\binom{۴}{۱}$ حالت ۲ مهره به یک نفر و در $\binom{۴}{۲}$ حالت ۲ مهره به دو نفر مختلف می‌رسد. اگر ۲ مهرهٔ قرمز به یک نفر رسیده باشد، تعداد راه‌های توزیع مهره‌های آبی برابر برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱ \geq ۰, \quad x_۲ \geq ۱, \quad x_۳ \geq ۱, \quad x_۴ \geq ۱$$

یعنی برابر $\binom{۱۰}{۳}$ است و اگر ۲ مهرهٔ قرمز به دو فرد مختلف رسیده باشد، تعداد راه‌های توزیع مهره‌های آبی برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱ \geq ۰, \quad x_۲ \geq ۰, \quad x_۳ \geq ۱, \quad x_۴ \geq ۱$$

یعنی برابر $\binom{۱۱}{۳}$ است. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۴}{۱}\binom{۱۰}{۳} + \binom{۴}{۲}\binom{۱۱}{۳}$$

مسائل

۱) الف) به چند طریق می‌توان ۴۰ آب نبات یکسان را بین ٦ نفر تقسیم کرد؟

ب) در چند حالت به هر نفر حداقل ۳ آب نبات می‌رسد؟

ج) در چند حالت فقط به ۴ نفر آب نبات می‌رسد؟

د) در چند حالت حداکثر به ۴ نفر آب نبات می‌رسد؟

۲) الف) به چند طریق می‌توان ۱۰ سکهٔ ۲۰ ریالی، ۸ سکهٔ ۵۰ ریالی و ۱۲ سکهٔ ۱۰۰ ریالی را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟

ب) در چند حالت به هر نفر حداقل یک سکهٔ ۱۰۰ ریالی می‌رسد؟

ج) در چند حالت سکه‌های ۱۰۰ ریالی فقط به ۳ نفر می‌رسند؟

۳) به چند طریق می‌توان ۱۲ سکهٔ ۵۰ ریالی و یک سکهٔ ۱۰۰ ریالی را بین ۴ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟

۴) به چند طریق می‌توان ۱۲ سکهٔ ۵۰ ریالی، یک سکهٔ ۱۰۰ ریالی و یک سکهٔ ۲۵۰ ریالی را بین ۴ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟

۵) الف) به چند طریق می‌توان ۴ سکهٔ ۱۰ ریالی، یک سکهٔ ۲۰ ریالی، یک سکهٔ ۵۰ ریالی، یک سکهٔ ۱۰۰ ریالی، یک سکه ۲۵۰ ریالی، یک سکه ۵۰۰ ریالی و یک سکه طلا را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟

ب) در چند حالت به هر نفر دقیقاً دو سکه می‌رسد؟

۶) به چند طریق می‌توان ۱۴ توپ یکسان را بین علی، رضا، حسن، حسین، داود و محمد تقسیم کرد به‌طوری‌که علی و رضا در مجموع حداکثر ۴ توپ دریافت کنند؟

۷) به چند طریق می‌توان ۱۲ توپ سفید و ۳ توپ قرمز را بین ۵ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) به هر نفر حداقل یک توپ برسد و در ضمن هیچ فردی بیش از یک توپ قرمز دریافت نکند؟

ب) به هر نفر حداقل یک توپ برسد و توپ‌های قرمز فقط به دو نفر برسند؟

فصل ٦

اصل شمول و عدم شمول

فرض کنید A_1، A_2، ... و A_n مجموعه‌هایی متناهی باشند. اصل شمول و عدم شمول فرمولی برای محاسبهٔ تعداد اعضای $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ برحسب تعداد اعضای A_1، A_2، ...، A_n و اشتراک‌های این مجموعه‌ها ارائه می‌دهد. در این فصل این فرمول را در حالتی که $n = 2$ یا $n = 3$ به‌دست می‌آوریم و کاربردهای آن را در حل مسائل شمارشی بیان می‌کنیم.

٦—١ حالت $n = 2$

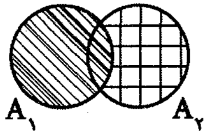
قضیهٔ ١.١.٦ فرض کنید A_1 و A_2 مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این صورت

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

برهان.

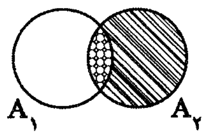
روش اول. مجموعهٔ $A_1 \cup A_2$ اجتماع دو مجموعهٔ مجزای A_1 و $A_2 - A_1$ است؛ پس بنابر اصل جمع،

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2 - A_1|$$



همچنین $A_۲ - A_۱$ مجموعهٔ اعضایی از $A_۲$ است که در $A_۱ \cap A_۲$ نیستند؛ پس بنابر اصل متمم،

$$|A_۲ - A_۱| = |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|$$



در نتیجه

$$|A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|$$

روش دوم. در عبارت $|A_۱| + |A_۲|$ هر عضوی که فقط در یکی از $A_۱$ و $A_۲$ قرار دارد دقیقاً یک بار و هر عضوی که در هر دوی $A_۱$ و $A_۲$ قرار دارد دوبار محاسبه می‌شود، لذا در عبارت $|A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|$ هر عضوی که در $A_۱ \cup A_۲$ قرار دارد دقیقاً یک بار محاسبه می‌شود.

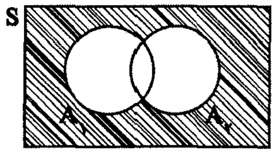
مسألهٔ ۲.۱.۶ یک مؤسسهٔ تحقیقاتی ۷۰ عضو دارد، ۴۰ نفر از آن‌ها زبان انگلیسی و ۳۵ نفر از آن‌ها زبان آلمانی را می‌دانند و ۱۵ نفر به هر دو زبان مسلط‌اند. چند عضو این مؤسسه هیچ یک از این دو زبان را نمی‌دانند؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ اعضای مؤسسه و $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ اعضایی باشند که به ترتیب زبان انگلیسی و آلمانی را می‌دانند. در این صورت

$$|S| = ۷۰, \quad |A_۱| = ۴۰, \quad |A_۲| = ۳۵, \quad |A_۱ \cap A_۲| = ۱۵$$

مجموعهٔ اعضایی که هیچ یک از دو زبان انگلیسی و آلمانی را نمی‌دانند برابر مکمل مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲$ یعنی برابر $A'_۱ \cap A'_۲$ است. پس

$$|A'_۱\cap A'_۲| = |S|-|A_۱\cup A_۲| = |S|-|A_۱|-|A_۲|+|A_۱\cap A_۲| = ۷۰-۴۰-۳۵+۱۵ = ۱۰$$



مسألهٔ ۳.۱.٦ چند عدد از مجموعهٔ $S = \{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$ بر حداقل یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیرند؟

راه‌حل. فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ اعضایی از S باشند که به ترتیب بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند. در این صورت

$$|A_۱| = \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \right\rfloor = ۵۰, \quad |A_۲| = \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \right\rfloor = ۳۳$$

$A_۱ \cap A_۲$ مجموعهٔ اعضایی از S است که بر هر دو عدد ۲ و ۳ بخش‌پذیرند. می‌دانیم عددی بر هر دو عدد ۲ و ۳ بخش‌پذیر است که بر ٦ بخش‌پذیر باشد، لذا

$$|A_۱ \cap A_۲| = \left\lfloor \frac{۱۰۰}{٦} \right\rfloor = ۱٦$$

مجموعهٔ اعضایی از S که بر حداقل یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیرند برابر $A_۱ \cup A_۲$ است. در نتیجه پاسخ مسأله برابر است با

$$|A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| = ۵۰ + ۳۳ - ۱٦ = ٦۷$$

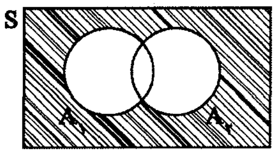
مسألهٔ ۴.۱.٦ در چند عدد ۵ رقمی هر دو رقم ۱ و ۲ وجود دارند؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۵ رقمی باشد و $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ اعضایی از S باشند که به ترتیب رقم ۱ و ۲ را ندارند. در این صورت

$$|S| = ۹ \times ۱۰^۴, \quad |A_۱| = |A_۲| = ۸ \times ۹^۴, \quad |A_۱ \cap A_۲| = ۷ \times ۸^۴$$

مجموعهٔ اعضایی از S که هر دو رقم ۱ و ۲ را دارند برابر مکمل مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲$ است. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲| = ۹ \times ۱۰^۴ - ۲ \times ۸ \times ۹^۴ + ۷ \times ۸^۴$$



مسألهٔ ۵.۱.۶ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ message هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ کل جایگشت‌های حروف کلمهٔ message باشد و $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب دو حرف e و دو حرف s در آن‌ها مجاورند. در این صورت

$$|S| = \frac{۶!}{۲!۲!}, \quad |A_۱| = |A_۲| = \frac{۵!}{۲!}, \quad |A_۱ \cap A_۲| = ۴!$$

مجموعهٔ جایگشت‌هایی که در آن‌ها هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند برابر مکمل مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲$ است، لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲| = \frac{۶!}{۲!۲!} - ۲ \times \frac{۵!}{۲!} + ۴!$$

مسألهٔ ۶.۱.۶ در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف a، b، c و d حداقل یکی از حروف a و b دقیقاً ۳ بار ظاهر شده است؟

راه‌حل. فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ کلمات ۱۰ حرفی با حروف a، b، c و d باشند که به ترتیب حرف a و حرف b در آن‌ها دقیقاً ۳ بار ظاهر شده است. در این صورت

$$|A_۱| = |A_۲| = \binom{۱۰}{۳} \times ۳^۷, \quad |A_۱ \cap A_۲| = \binom{۱۰}{۳}\binom{۷}{۳} \times ۲^۴$$

کلمات مطلوب کلماتی هستند که در حداقل یکی از $A_۱$ و $A_۲$ قرار دارند. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|A_۱ \cup A_۲| = ۲ \times \binom{۱۰}{۳} \times ۳^۷ - \binom{۱۰}{۳}\binom{۷}{۳} \times ۲^۴$$

مسألهٔ ۷.۱.٦ در چند کلمهٔ ۱۰ حرفی با حروف a، b، c و d هر یک از حروف a و b حداقل دوبار ظاهر شده‌اند؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ کلمات ۱۰ حرفی با حروف a، b، c و d باشد و $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ کلماتی از S باشند که به ترتیب حرف a و حرف b در آن‌ها حداکثر یک بار ظاهر شده است. در این صورت

$$|S| = ۴^{۱۰}, \quad |A_۱| = |A_۲| = ۳^{۱۰} + ۱۰ \times ۳^۹$$

زیرا کلماتی که در $A_۱$ قرار دارند دو دسته‌اند. یک دسته کلماتی که حرف a را ندارند و دستهٔ دیگر کلماتی که حرف a در آن‌ها دقیقاً یک بار ظاهر شده است. تعداد کلمات دستهٔ اول برابر $۳^{۱۰}$ و تعداد کلمات دستهٔ دوم برابر $۳^۹ \times ۱۰$ است. به طور مشابه کلماتی که در $A_۱ \cap A_۲$ قرار دارند چهار دسته‌اند. دستهٔ اول شامل کلماتی است که هیچ یک از دو حرف a و b را ندارند، دستهٔ دوم شامل کلماتی است که حرف a را ندارند و حرف b در آن‌ها دقیقاً یک بار ظاهر شده است، دستهٔ سوم شامل کلماتی است که حرف b را ندارند و حرف a در آن‌ها دقیقاً یک بار ظاهر شده است و دستهٔ چهارم شامل کلماتی است که هر یک از a و b در آن‌ها دقیقاً یک بار ظاهر شده‌اند. در نتیجه

$$|A_۱ \cap A_۲| = ۲^{۱۰} + ۱۰ \times ۲^۹ + ۱۰ \times ۲^۹ + ۱۰ \times ۹ \times ۲^۸$$

کلمات مطلوب کلماتی هستند که در هیچ یک از A_1 و A_2 قرار ندارند. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_1 \cup A_2| = 4^{10} - 2 \times (3^{10} + 10 \times 3^9) + 2^{10} + 2 \times 10 \times 2^9 + 10 \times 9 \times 2^8$$

مسألهٔ ۸.۱.۶ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

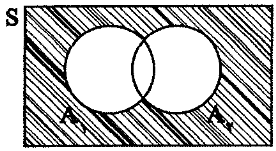
$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad 1 \leq x_2 \leq 5, \quad x_3 \geq 2, \quad x_4 \geq 3$$

چند جواب دارد؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq 2, \quad x_4 \geq 3$$

A_1 مجموعهٔ همهٔ جواب‌هایی از S که $x_1 \geq 6$ و A_2 مجموعهٔ همهٔ جواب‌هایی از S باشد که $x_2 \geq 6$. در این صورت جواب‌های مطلوب دقیقاً جواب‌هایی هستند که در هیچ یک از A_1 و A_2 قرار ندارند.



بنا به قضیهٔ ۶.۱.۵، $|S| = \binom{17}{3}$. مجموعهٔ A_1 شامل همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_1 \geq 6, \quad x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq 2, \quad x_4 \geq 3$$

است، لذا بنا به قضیهٔ ۶.۱.۵، $|A_1| = \binom{11}{3}$. به طور مشابه $|A_2| = \binom{12}{3}$. همچنین مجموعهٔ $A_1 \cap A_2$ شامل همهٔ جواب‌هایی از معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ در مجموعهٔ اعداد

صحیح است که

$$x_۱ \geq ٦, \quad x_۲ \geq ٦, \quad x_۳ \geq ۲, \quad x_۴ \geq ۳$$

لذا بنا به قضیهٔ ٦.۱.۵، $|A_۱ \cap A_۲| = \binom{٦}{۳}$. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲| = \binom{۱۷}{۳} - \binom{۱۱}{۳} - \binom{۱۲}{۳} + \binom{٦}{۳}$$

مسائل

۱) در یک آموزشگاه ۱۰۰ نفر ثبت‌نام کرده‌اند. در بین آن‌ها ۵۰ نفر در کلاس ریاضی، ۴۰ نفر در کلاس فیزیک و ۱۵ نفر در هر دو کلاس ثبت‌نام کرده‌اند.

الف) چند نفر در هیچ یک از کلاس‌های فیزیک و ریاضی ثبت‌نام نکرده‌اند؟

ب) چند نفر فقط در یکی از کلاس‌های فیزیک و ریاضی ثبت‌نام کرده‌اند؟

۲) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ بر هیچ یک از ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

۳) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ فقط بر یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیرند؟

۴) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰۰\}$ نه مربع کامل‌اند و نه مکعب کامل؟

۵) در چند عدد ۵ رقمی

الف) هر دو رقم ۰ و ۱ وجود دارند؟

ب) فقط یکی از این دو رقم وجود دارد؟

ج)* دقیقاً دوتا از ارقام ۱، ۳، ۵ و ۷ وجود دارند؟

٦) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ systematic هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

۷) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm هیچ یک از عبارت‌های log و th وجود ندارند؟

۸) در چند عدد ۵ رقمی حاصل‌ضرب ارقام بر ٦ بخش‌پذیر است؟

۹)* در چند عدد ۵ رقمی بزرگترین رقم برابر ۸ و کوچکترین رقم برابر ۳ است؟

۱۰) به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ متمایز را بین دو دختر و دو پسر تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) به هر دختر حداقل یک توپ برسد؟

ب)* به هر دختر حداقل دو توپ برسد؟

ج) هیچ دختری دقیقاً دو توپ دریافت نکند؟

۱۱) به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ یکسان را بین دو دختر و دو پسر تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) به هر دختر حداکثر سه توپ برسد؟

ب) به هر دختر حداکثر سه توپ و به هر پسر حداقل یک توپ برسد؟

ج) هیچ دختری دقیقاً سه توپ دریافت نکند؟

۱۲) فرض کنید A مجموعهٔ اعداد چهاررقمی با ارقام متمایز و B مجموعهٔ اعداد چهاررقمی با ارقام زوج باشد. تعداد اعضای $A \cup B$ را بیابید.

۱۳) فرض کنید A مجموعهٔ اعداد چهاررقمی باشد که هر دو رقم مجاور آن‌ها متمایزند و B مجموعهٔ اعداد چهاررقمی با ارقام فرد باشد. تعداد اعضای $A \cup B$ را بیابید.

۱۴)* فرض کنید A_i مجموعهٔ اعداد ۸ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد که رقم i در آن‌ها حداقل ۴ بار آمده است. تعداد اعضای $A_1 \cup A_2$ را بیابید.

۱۵)* می‌خواهیم به مدت ۵ روز از بین ٦ نفر به نام‌های A، B، C، D، E و F هر روز یک تیم ۳ نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به‌طوری‌که

الف) هر یک از A و B حداقل یک روز عضو تیم باشند؟

ب) هر یک از A و B حداقل یک روز عضو تیم نباشند؟

ج) A حداقل دو روز و B حداقل یک روز عضو تیم باشد؟

د) A حداقل دو روز و B حداقل یک روز عضو تیم نباشد؟

ه) A و B حداقل یک روز با هم عضو تیم باشند و C و D نیز حداقل یک روز با هم عضو تیم باشند؟

۱۶)* به چند طریق می‌توان ۵ دکتر، ۵ مهندس و ۵ معلم را به ۳ اتاق ۵ نفرهٔ A، B و C تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) در هر یک از اتاق‌های A و B حداقل یک دکتر حضور داشته باشد؟

ب) در اتاق A حداقل یک دکتر و حداقل یک مهندس حضور داشته باشند؟

ج) در اتاق A حداقل دو دکتر و حداقل یک مهندس حضور داشته باشند؟

د) در اتاق A حداقل دو دکتر و در اتاق B حداقل یک دکتر حضور داشته باشند؟

ه) در اتاق A حداقل یک دکتر و در اتاق B حداقل یک مهندس حضور داشته باشد؟

و) تعداد دکترهای اتاق A عددی غیر از ۲ و تعداد دکترهای اتاق B عددی غیر از ۱ باشد؟

۱۷) می‌خواهیم از بین ۱۰ کلاس اولی، ۱۰ کلاس دومی و ۱۰ کلاس سومی یک تیم ۸ نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به‌طوری‌که

الف) حداقل یک کلاس اولی و حداقل یک کلاس دومی عضو تیم باشند؟

ب) حداقل دو کلاس اولی و حداقل یک کلاس دومی عضو تیم باشند؟

ج) تعداد کلاس اولی‌های عضو تیم عددی غیر از ۳ و تعداد کلاس دومی‌های عضو تیم عددی غیر از ۲ باشد؟

۱۸) معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$۲ \leq x_۱ \leq ۷, \quad ۳ \leq x_۲ \leq ٦, \quad x_۳ \geq ۰$$

چند جواب دارد؟

۱۹)* به چند طریق می‌توان ۱۰ سکهٔ ۲۰ ریالی و ۸ سکهٔ ۵۰ ریالی را بین علی، رضا، حسن و حسین تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر یک از علی و رضا حداقل یک سکه برسد؟

۲۰) چند عدد طبیعی مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۱۰۰^{۳۰}$ و $۱۲۰^{۴۰}$ هستند؟

۲۱) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ triangle هیچ یک از حروف r و g سر جای اصلی خود قرار ندارند؟

۲۲) به چند طریق می‌توان بین شهرهای A، B، C، D و E تعدادی جاده احداث کرد طوری که هر جاده بین دو شهر باشد، بین هر دو شهر حداکثر یک جاده احداث شود و از هر یک از شهرهای A و B حداقل یک جاده خارج شود؟

۲۳) می‌خواهیم از بین ۱۰ کلاس اولی، ۱۰ کلاس دومی و ۱۰ کلاس سومی یک تیم ۲۱ نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به‌طوری‌که

الف) حداقل یک کلاس اولی و حداقل یک کلاس دومی عضو تیم نباشد؟

ب) حداقل دو کلاس اولی و حداقل یک کلاس دومی عضو تیم نباشند؟

۲۴) به چند طریق می‌توان ۳ دکتر، ۳ مهندس و ۳ معلم را به ۳ اتاق ۳ نفرهٔ A، B و C تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) در یک اتاق حداقل دو دکتر و در یک اتاق حداقل دو مهندس حضور داشته باشند؟

ب) دکترها حداقل در دو اتاق و مهندسین نیز حداقل در دو اتاق حضور داشته باشند؟

٦—۲ حالت $n = 3$

قضیهٔ ۱.۲.٦ فرض کنید A_1، A_2 و A_3 مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این صورت

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

برهان.

روش اول. با استفاده از قضیهٔ ۱.۱.٦ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - (|A_1 \cap A_3| \\
&\quad + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|) \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}$$

روش دوم. ثابت می‌کنیم در عبارت

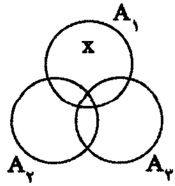
$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \qquad (*)$$

هر عضو $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ دقیقاً یک بار محاسبه می‌شود. فرض کنید $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$. در این صورت برای x سه حالت وجود دارد.

حالت اول. x دقیقاً در یکی از A_1، A_2 و A_3 قرار داشته باشد.

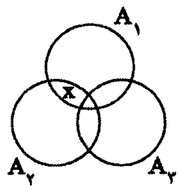
مثلاً فرض کنید x متعلق به A_1 باشد ولی به A_2 و A_3 تعلق نداشته باشد. در این صورت x در $|A_1|$ یک بار محاسبه می‌شود ولی در بقیهٔ جملات عبارت $(*)$، x محاسبه نمی‌شود.

پس x در عبارت $(*)$ یک بار محاسبه می‌شود.



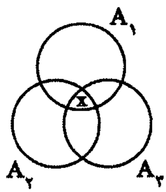
حالت دوم. x دقیقاً در دوتا از A_1، A_2 و A_3 قرار داشته باشد.

مثلاً فرض کنید x متعلق به A_1 و A_2 باشد ولی به A_3 تعلق نداشته باشد. در این صورت x در جملات $|A_1|$، $|A_2|$ و $|A_1 \cap A_2|$ یک بار محاسبه می‌شود و در بقیهٔ جملات عبارت $(*)$ محاسبه نمی‌شود. چون در عبارت $(*)$، A_1 و A_2 با علامت مثبت و $|A_1 \cap A_2|$ با علامت منفی ظاهر شده است، لذا x در عبارت $(*)$ یک بار محاسبه می‌شود.



حالت سوم. x در هر سه‌تا از A_1، A_2 و A_3 قرار داشته باشد.

در این حالت x در کلیهٔ جملات عبارت $(*)$ محاسبه می‌شود و چون در عبارت $(*)$ چهار جمله با علامت مثبت و سه جمله با علامت منفی ظاهر شده است، لذا x در عبارت $(*)$ یک بار محاسبه می‌شود.



پس عبارت $(*)$ هر عضو $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را دقیقاً یک بار محاسبه می‌کند و لذا حاصل آن برابر $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ است.

مسألهٔ ۲.۲.٦ در یک نظرسنجی از دانش‌آموزان یک مدرسه، ۱۲۰ نفر به ریاضی، ۹۰ نفر به فیزیک، ۷۰ نفر به شیمی، ۴۰ نفر به ریاضی و فیزیک، ۳۰ نفر به ریاضی و شیمی، ۲۰ نفر به فیزیک و شیمی و ۱۰ نفر به هر سه درس علاقمند هستند.

الف) چند دانش‌آموز از این مدرسه به حداقل یکی از سه درس ریاضی، فیزیک و شیمی علاقمندند؟

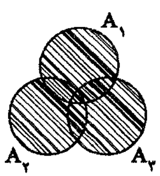
ب) چند دانش‌آموز از این مدرسه فقط به درس ریاضی از بین دروس ریاضی، فیزیک و شیمی علاقمندند؟

ج) چند دانش‌آموز از این مدرسه دقیقاً به دو درس از سه درس ریاضی، فیزیک و شیمی علاقمندند؟

راه‌حل. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 مجموعهٔ دانش‌آموزانی از مدرسه باشد که به ترتیب به ریاضی، فیزیک و شیمی علاقمندند. در این صورت $|A_1| = ۱۲۰$، $|A_2| = ۹۰$، $|A_3| = ۷۰$، $|A_1 \cap A_2| = ۴۰$، $|A_1 \cap A_3| = ۳۰$، $|A_2 \cap A_3| = ۲۰$ و $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = ۱۰$.

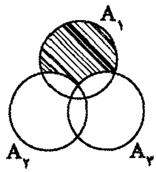
الف) دانش‌آموزان مطلوب، دانش‌آموزانی هستند که حداقل در یکی از A_1، A_2 و A_3 قرار دارند. پس پاسخ این قسمت بنا به قضیهٔ ۱.۲.٦ برابر است با

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = ۱۲۰ + ۹۰ + ۷۰ - ۴۰ - ۳۰ - ۲۰ + ۱۰ = ۲۰۰$$



ب) دانش‌آموزان مطلوب، دانش‌آموزانی هستند که فقط در A_1 قرار دارند. تعداد این دانش‌آموزان برابر است با

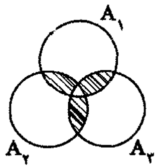
$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2' \cap A_3'| &= |A_1| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= ۱۲۰ - ۴۰ - ۳۰ + ۱۰ = ٦۰ \end{aligned}$$



توجه کنید که در عبارت فوق هر عضوی که فقط در $A_۱$ قرار دارد یک بار محاسبه می‌شود و بقیهٔ اعضا محاسبه نمی‌شوند.

ج) دانش‌آموزان مطلوب، دانش‌آموزانی هستند که دقیقاً در دوتا از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار دارند. تعداد این دانش‌آموزان برابر است با

$$|A_۱\cap A_۲|+|A_۱\cap A_۳|+|A_۲\cap A_۳|-۳|A_۱\cap A_۲\cap A_۳| = ۴۰+۳۰+۲۰-۳\times ۱۰ = ۶۰$$

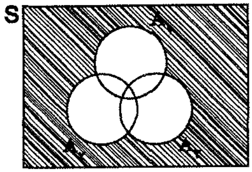


توجه کنید که عبارت فوق هر عضوی را که دقیقاً در دوتا از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار دارد یک بار محاسبه می‌کند و بقیهٔ اعضا را محاسبه نمی‌کند.

مسألهٔ ۳.۲.۶ در چند عدد ۶ رقمی حاصل‌ضرب ارقام بر ۳۰ بخش‌پذیر است؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۶ رقمی باشد و $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعهٔ اعضایی از S باشند که حاصل‌ضرب ارقام آن‌ها به ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد. در این صورت مجموعهٔ اعداد ۶ رقمی که حاصل‌ضرب ارقام آن‌ها بر ۳۰ بخش‌پذیر است برابر مکمل

مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$ است.



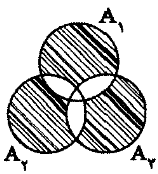
مجموعهٔ $A_۱$ شامل همهٔ اعداد ٦ رقمی با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ است، لذا $|A_۱| = ۵^٦$. به طور مشابه $|A_۲| = ٦^٦$ و $|A_۳| = ۸^٦$. مجموعهٔ $A_۱ \cap A_۲$ شامل همهٔ اعداد ٦ رقمی با ارقام ۱، ۵ و ۷ است، لذا $|A_۱ \cap A_۲| = ۳^٦$. به طور مشابه $|A_۱ \cap A_۳| = ۴^٦$ و $|A_۲ \cap A_۳| = ۵^٦$ و در نهایت مجموعهٔ $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$ شامل همهٔ اعداد ٦ رقمی با ارقام ۱ و ۷ است، لذا $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۲^٦$. در نتیجه پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۹ \times ۱۰^۵ - ۵^٦ - ٦^٦ - ۸^٦ + ۳^٦ + ۴^٦ + ۵^٦ - ۲^٦$$

مسألهٔ ۴.۲.٦ در چند جایگشت از حروف عبارت mathisfun فقط یکی از عبارت‌های math، is و fun وجود دارد؟

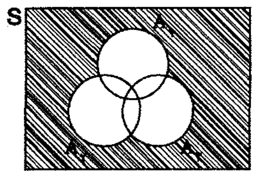
راه‌حل. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از حروف عبارت mathisfun باشند که به ترتیب عبارت‌های math، is و fun را دارند. در این صورت جایگشت‌های مطلوب جایگشت‌هایی هستند که فقط در یکی از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار دارند. تعداد این جایگشت‌ها برابر است با

$$|A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - ۲|A_۱ \cap A_۲| - ۲|A_۱ \cap A_۳| - ۲|A_۲ \cap A_۳| + ۳|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$= ٦! + ۸! + ۷! - ۲ \times ۵! - ۲ \times ۴! - ۲ \times ٦! + ۳ \times ۳!$$



مسألهٔ ۶.۲.۵ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ profile هیچ یک از حروف صدادار سرجای اصلی خود قرار ندارند؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جایگشت‌های حروف کلمهٔ profile باشد و A_1، A_2 و A_3 مجموعهٔ جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب حرف o، حرف i و حرف e در آن‌ها سر جای اصلی خود باشند. در این صورت جایگشت‌های مطلوب جایگشت‌هایی هستند که در هیچ یک از A_1، A_2 و A_3 قرار ندارند.



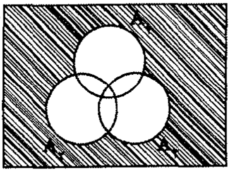
مجموعهٔ A_1 شامل جایگشت‌هایی است که حرف سوم آن‌ها o است، لذا $|A_1| = ۶!$ و به طور مشابه $|A_2| = |A_3| = ۶!$. مجموعهٔ $A_1 \cap A_2$ شامل جایگشت‌هایی است که حرف سوم آن‌ها o و حرف پنجم آن‌ها i است، لذا $|A_1 \cap A_2| = ۵!$ و به طور مشابه $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = ۵!$ و $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = ۴!$. پس پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = ۷! - ۳ \times ۶! + ۳ \times ۵! - ۴!$$

مسألهٔ ۶.۲.۶ به چند طریق می‌توان ۷ کتاب متمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداقل یک کتاب برسد؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ کل روش‌های توزیع ۷ کتاب بین ۳ نفر باشد و A_1، A_2 و A_3 مجموعهٔ توزیع‌هایی باشند که به ترتیب به نفرهای اول، دوم و سوم هیچ کتابی نمی‌رسد. در

این صورت توزیع‌های مطلوب توزیع‌هایی هستند که در هیچ یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار ندارند.



تعداد کل روش‌های توزیع برابر $۳^۷$ است، لذا $|S| = ۳^۷$. مجموعهٔ $A_۱$ شامل توزیع‌هایی است که به نفر اول هیچ کتابی نمی‌رسد، لذا $|A_۱| = ۲^۷$ و به طور مشابه $|A_۲| = |A_۳| = ۲^۷$. مجموعهٔ $A_۱ \cap A_۲$ شامل توزیع‌هایی است که به نفر اول و دوم هیچ کتابی نمی‌رسد، یعنی توزیعی که هر هفت کتاب به نفر سوم برسد، لذا $|A_۱ \cap A_۲| = ۱$ و به طور مشابه $|A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱$ و $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۳^۷ - ۳ \times ۲^۷ + ۳$$

مسألهٔ ۷.۲.٦ معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$۲ \leq x_۱ \leq ۱۰, \quad ۵ \leq x_۲ \leq ۱۱, \quad ۳ \leq x_۳ \leq ۱۵$$

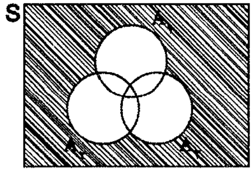
چند جواب دارد؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱ \geq ۲, \quad x_۲ \geq ۵, \quad x_۳ \geq ۳,$$

$A_۱$ مجموعهٔ همهٔ جواب‌هایی از S که $x_۱ \geq ۱۱$، $A_۲$ مجموعهٔ همهٔ جواب‌هایی از S که $x_۲ \geq ۱۲$ و $A_۳$ مجموعهٔ همهٔ جواب‌هایی از S باشد که $x_۳ \geq ۱٦$. در این صورت جواب‌های

مطلوب دقیقاً جواب‌هایی هستند که در هیچ یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار ندارند.



بنا به قضیهٔ ۶.۱.۵، $\binom{۲۲}{۲} = |S|$. مجموعهٔ $A_۱$ شامل همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱ \geq ۱۱, \quad x_۲ \geq ۵, \quad x_۳ \geq ۳$$

است، لذا بنا به قضیهٔ ۶.۱.۵، $\binom{۱۳}{۲} = |A_۱|$ و به طور مشابه $\binom{۱۵}{۲} = |A_۲|$ و $\binom{۹}{۲} = |A_۳|$. مجموعهٔ $A_۱ \cap A_۲$ شامل همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱ \geq ۱۱, \quad x_۲ \geq ۱۲, \quad x_۳ \geq ۳$$

است، لذا بنا به قضیهٔ ۶.۱.۵، $\binom{۶}{۲} = |A_۱ \cap A_۲|$ و به طور مشابه $|A_۱ \cap A_۳| = ۰$ و $|A_۲ \cap A_۳| = ۰$ و به وضوح $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = \binom{۲۲}{۲} - \binom{۱۳}{۲} - \binom{۱۵}{۲} - \binom{۹}{۲} + \binom{۶}{۲}$$

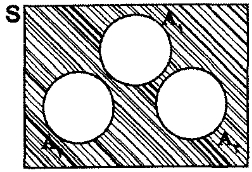
مسألهٔ ۸.۲.۶ به چند طریق می‌توان یک تیم ۱۲ نفره از بین ۱۰ کلاس اولی، ۱۰ کلاس دومی و ۱۰ کلاس سومی انتخاب کرد به‌طوری‌که از هر کلاس حداقل یک نفر عضو تیم باشد؟

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ کل تیم‌های ۱۲ نفره از بین ۳۰ نفر باشد و $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعهٔ تیم‌های ۱۲ نفره باشند که در آن‌ها به ترتیب هیچ کلاس اولی، هیچ کلاس دومی و هیچ کلاس سومی حضور نداشته باشد. در این صورت تیم‌های مطلوب دقیقاً تیم‌هایی هستند

که در هیچ یک از A_1، A_2 و A_3 قرار ندارند. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \binom{30}{12} - 3\binom{20}{12}$$

توجه کنید که مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 دوبه‌دو مجزایند.



مسائل

۱) یک مؤسسهٔ تحقیقاتی ۱۰۰ عضو دارد. از این اعضا ۳۰ نفر آلمانی، ۲۵ نفر اسپانیایی، ۴۰ نفر انگلیسی، ۱۰ نفر هم آلمانی و هم اسپانیایی، ۱۵ نفر هم آلمانی و هم انگلیسی، ۱۰ نفر هم اسپانیایی و هم انگلیسی و ۵ نفر هم هر سه زبان را می‌دانند.

الف) چند عضو مؤسسه هیچ یک از ۳ زبان را نمی‌دانند؟

ب) چند عضو مؤسسه دقیقاً یکی از ۳ زبان را می‌دانند؟

ج) چند عضو مؤسسه دقیقاً دوتا از ۳ زبان را می‌دانند؟

د) چند عضو مؤسسه فقط زبان آلمانی را می‌دانند؟

۲) فرض کنید A_1، A_2 و A_3 مجموعه‌هایی متناهی باشند.

الف) ثابت کنید تعداد اعضایی که فقط در A_1 قرار دارند برابر است با

$$|A_1| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

ب) ثابت کنید تعداد اعضایی که دقیقاً در دوتا از A_1، A_2 و A_3 قرار دارند برابر است با

$$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

ج) ثابت کنید تعداد اعضایی که دقیقاً در یکی از A_1، A_2 و A_3 قرار دارند برابر است با

$$|A_1|+|A_2|+|A_3|-2|A_1\cap A_2|-2|A_1\cap A_3|-2|A_2\cap A_3|+3|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

۳) چند عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 300\}$

الف) بر حداقل یکی از ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند؟

ب) دقیقاً بر دوتا از ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند؟

ج) دقیقاً بر یکی از ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند؟

د) بر ۲ بخش‌پذیرند ولی بر هیچ یک از ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

۴) در چند عدد ۷ رقمی

الف) هر سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارند؟

ب) دقیقاً دوتا از سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارند؟

ج) دقیقاً سه‌تا از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ وجود دارند؟

۵) الف) در چند کلمهٔ ۸ حرفی با حروف a، b و c از هر سه حرف استفاده شده است؟

ب) در چند کلمهٔ ۸ حرفی با حروف a، b، c، d و e دقیقاً ۳ حرف مختلف وجود دارد؟

۶) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mathematics هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

۷) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ institutional هیچ یک از عبارت‌های sit، nal و otu وجود ندارند؟

۸) به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به ۳ اتاق A، B و C تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) هیچ اتاقی خالی نماند؟

ب) در هر اتاق حداقل دو نفر قرار گیرند؟

ج) در هیچ اتاقی دقیقاً ۲ نفر قرار نگیرند؟

۹) به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ متمایز را بین ۵ پسر بچه تقسیم کرد به‌طوری‌که دقیقاً به سه نفر توپ برسد؟

۱۰) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm

الف) هیچ یک از حروف صدادار سر جای اصلی خود قرار ندارند؟

ب) دقیقاً یکی از حروف صدادار سر جای اصلی خود قرار دارند؟

ج) دقیقاً سه تا از حروف بی‌صدا سر جای اصلی خود قرار دارند؟

۱۱) علی سه دوست دارد که با هر کدام از آن‌ها ۱۰ مرتبه شام خورده است. با هر دو نفر از آن‌ها ۵ مرتبه و با هر سه نفر ۲ مرتبه شام خورده است.

الف) علی چند شب با حداقل یکی از دوستان خود شام خورده است؟

ب) علی چند شب با دقیقاً یکی از دوستان خود شام خورده است؟

۱۲)* در چند عدد ۸ رقمی با ارقام ناصفر حداقل یکی از ارقام ۱، ۲ و ۳ بیش از ۳ بار ظاهر شده است؟

۱۳) به چند طریق می‌توان ۱۲ سکهٔ یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) به هر نفر حداکثر ۵ سکه برسد؟

ب) به هیچ فردی دقیقاً ۴ سکه نرسد؟

۱۴)* به چند طریق می‌توان ۵ دکتر، ۵ مهندس و ۵ معلم را به ۵ اتاق ۳ نفرهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_۵$ تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) حداقل دو دکتر در یک اتاق باشند، حداقل دو مهندس در یک اتاق باشند و حداقل دو معلم در یک اتاق باشند؟

ب) حداقل در یک اتاق هر ۳ نفر دارای یک شغل باشند؟

ج) حداقل در یکی از اتاق‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ هیچ دو نفری دارای یک شغل نباشند؟

۱۵) به چند طریق می‌توان ۵ دکتر، ۵ مهندس و ۵ معلم را به ۳ اتاق ۵ نفرهٔ A، B و C تقسیم کرد به‌طوری‌که

الف) در هر اتاق حداقل یک دکتر حضور داشته باشد؟

ب) در اتاق A حداقل یک دکتر، یک مهندس و یک معلم حضور داشته باشد؟

ج) در هر اتاق حداقل دو نفر با شغل‌های مختلف وجود داشته باشند؟

د) تعداد دکترهای هر اتاق عددی غیر از ۱ باشد؟

۱۶) به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ کلاس اولی، ۱۰ کلاس دومی و ۱۰ کلاس سومی یک تیم ۱۴ نفره انتخاب کرد به‌طوری‌که

الف) از هر کلاس حداقل یک نفر عضو تیم باشد؟

ب) از هر کلاس حداقل یک نفر عضو تیم نباشد؟

۱۷) معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۵$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$-۲ \leq x_۱ \leq ۱۰, \quad -۲ \leq x_۲ \leq ۱۲, \quad -۱ \leq x_۳ \leq ۹$$

چند جواب دارد؟

۱۸) به چند طریق می‌توان ۱۰ سکهٔ ۲۰ ریالی و ۱۲ سکهٔ ۵۰ ریالی را بین ۳ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟

۱۹) چند عدد طبیعی مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۹۰^{۵۰}$، $۱۲۰^{۴۰}$ و $۱۵۰^{۳۰}$ هستند؟

۲۰) به چند طریق می‌توان بین شهرهای A، B، C، D و E تعدادی جاده احداث کرد طوری که هر جاده بین دو شهر باشد، بین هر دو شهر حداکثر یک جاده احداث شود و از هر یک از شهرهای A، B و C حداقل یک جاده خارج شود؟

۲۱) در یک کیسه ۵ سکهٔ ۱۰ ریالی، ۸ سکهٔ ۲۰ ریالی و ۱۴ سکهٔ ۵۰ ریالی وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۱۵ سکه از این کیسه انتخاب کرد؟

۲۲) در چند عدد ۲۰ رقمی با هجده رقم ۱ و دو رقم ۲

الف) هیچ دنباله‌ای شامل ۱۰ رقم متوالی ۱ وجود ندارد؟

ب) هیچ دنباله‌ای شامل ۸ رقم متوالی ۱ وجود ندارد؟

۲۳) به چند طریق می‌توان ۱۰ سکهٔ ۲۰ ریالی، ۸ سکهٔ ۵۰ ریالی و ۱۴ سکهٔ ۱۰۰ ریالی را بین دو نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر نفر ۱٦ سکه برسد؟

۲۴) سطرها و ستون‌های یک صفحهٔ شطرنجی با شماره‌های ۱ تا ۸ شماره شده‌اند. فرض کنید A، B و C خانه‌های

الف) $(۱, ۱)$، $(۲, ۲)$ و $(۳, ۳)$

ب) $(۱, ۱)$، $(۱, ۲)$ و $(۲, ۳)$

باشند. در هر حالت تعداد راه‌های قراردادن ۵ مهرهٔ رخ یکسان را در ۵ خانه غیر از خانه‌های A، B و C بیابید به‌طوری‌که هر یک از خانه‌های A، B و C تهدید شوند.

۲۵) به چند طریق می‌توان ۱۰ مهرهٔ یکسان را در ۱۰ خانه از یک جدول ۲۰ × ۳ قرارداد به‌طوری‌که در هر سطر حداقل یک مهره وجود داشته باشد؟

۲۶) به چند طریق می‌توان سه مهرهٔ رخ متمایز را در سه خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرارداد به‌طوری‌که حداقل یکی از مهره‌ها توسط دو مهرهٔ دیگر تهدید نشود؟

فصل ۷

اصل لانه کبوتری

در این فصل اصل لانه کبوتری را معرفی می‌کنیم و با حل مسأله‌هایی متنوع روش‌های استفاده از آن را آموزش می‌دهیم. اصل لانه کبوتری معمولاً در مسائلی به‌کار می‌آید که می‌خواهیم وجود چند شیء را که دارای ویژگی مشترکی هستند ثابت کنیم.

۷—۱ صورت سادهٔ اصل لانه کبوتری

قضیهٔ ۱.۱.۷ اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m > n$، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل دو کبوتر وارد آن شده‌اند.

برهان. اگر حکم درست نباشد، آنگاه در هر لانه حداکثر یک کبوتر وارد شده است و لذا حداکثر n کبوتر وارد لانه‌ها شده‌اند، اما طبق فرض بیش از n کبوتر وارد لانه‌ها شده‌اند. تناقض حاصل حکم قضیه را نتیجه می‌دهد.

اصل لانه کبوتری در عین سادگی کلید حل بسیاری از مسائل است. در حل مسائل معمولاً از یکی از دو صورت زیر که هر یک با صورت قضیهٔ ۱.۱.۷ معادل است استفاده می‌کنیم:

اگر m شیء به n دسته تقسیم شوند و $m > n$، آنگاه دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو شیء در آن قرار گرفته‌اند.

اگر m شیء از n دسته انتخاب شوند و $m > n$، آنگاه دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو شیء از آن انتخاب شده‌اند.

مسألهٔ ۲.۱.۷ ثابت کنید در بین ۱۳ نفر دو نفر وجود دارند که ماه تولد آن‌ها یکی است.

راه‌حل. این ۱۳ نفر را بر اساس ماه تولدشان دسته‌بندی می‌کنیم. چون تعداد ماه‌های سال برابر ۱۲ است، لذا ۱۳ نفر به ۱۲ دسته تقسیم می‌شوند. پس بنابر اصل لانه کبوتری دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار دارند. اما وجود دو نفر در یک دسته به این معنی است که ماه تولد آن‌ها یکی است.

همان گونه که در مسألهٔ قبل ملاحظه کردید مهم‌ترین روش برای اثبات وجود چند شیء با یک ویژگی مشترک دسته‌بندی اشیاء بر اساس آن ویژگی است.

مسألهٔ ۳.۱.۷ ۷ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۲\}$ داده شده است. ثابت کنید مجموع دوتا از این اعداد برابر ۱۳ است.

راه‌حل. اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۲\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که مجموع اعداد در هر دسته برابر ۱۳ شود. پس دسته‌بندی زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\{۱, ۱۲\} \quad \{۲, ۱۱\} \quad \{۳, ۱۰\} \quad \{۴, ۹\} \quad \{۵, ۸\} \quad \{۶, ۷\}$$

حال ۷ عدد از ۶ دسته داده شده است، پس بنابر اصل لانه کبوتری دوتا از این اعداد از یک دسته‌اند و لذا مجموع این دو عدد برابر ۱۳ است.

مسألهٔ ۴.۱.۷ ۱۱ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ داده شده است. ثابت کنید دوتا از این اعداد هستند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

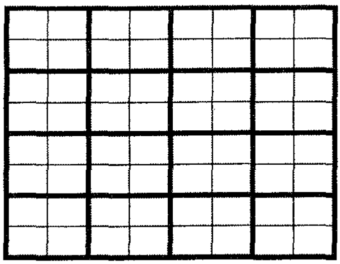
راه‌حل. اگر بتوانیم اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ را به ۱۰ دسته تقسیم کنیم طوری که برای هر دو عددی که در یک دسته قرار دارند یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد، در این صورت مسأله حل شده است. مثلاً دسته‌بندی زیر این ویژگی را دارد.

$$\{۹, ۱۸\} \quad \{۷, ۱۴\} \quad \{۵, ۱۰, ۲۰\} \quad \{۳, ۶, ۱۲\} \quad \{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\}$$

$$\{۱۹\} \quad \{۱۷\} \quad \{۱۵\} \quad \{۱۳\} \quad \{۱۱\}$$

مسألهٔ ۵.۱.۷ ۱۷ خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ به رنگ قرمز در آمده است. ثابت کنید دو خانهٔ قرمز وجود دارد که حداقل یک رأس مشترک دارند.

راه‌حل. اگر بتوانیم خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به ۱۶ دسته تقسیم کنیم طوری که هر دو خانه‌ای که در یک دسته قرار دارند حداقل یک رأس مشترک داشته باشند، در این صورت مسأله حل شده است. هر دو خانه از یک مربع ۲×۲ حداقل یک رأس مشترک دارند. چون خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ را می‌توانیم به ۱۶ مربع ۲×۲ تقسیم کنیم، لذا حکم مسأله نتیجه می‌شود.



مسألهٔ ۶.۱.۷ ۹ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۸۰\}$ داده شده است. ثابت کنید به‌ازای دوتا از این اعداد مانند x و y،

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < ۱$$

راه‌حل. اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۸۰\}$ را به صورت زیر به ۸ دسته تقسیم می‌کنیم

$$\{۱۶, \ldots, ۲۴\} \quad \{۹, \ldots, ۱۵\} \quad \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸\} \quad \{۱, ۲, ۳\}$$

$$\{۶۴, \ldots, ۸۰\} \quad \{۴۹, \ldots, ۶۳\} \quad \{۳۶, \ldots, ۴۸\} \quad \{۲۵, \ldots, ۳۵\}$$

در واقع در دستهٔ k ام کلیهٔ اعداد صحیح از عدد $k^{۲}$ تا عدد $(k+۱)^{۲} - ۱$ را قرار می‌دهیم. حال ۹ عدد از این ۸ دسته داده شده است، پس بنابر اصل لانه کبوتری دوتا از این اعداد در یک دسته قرار دارند، مثلاً فرض کنید x و y متعلق به دستهٔ k ام باشند، در این صورت $k^{۲} \leq x < y \leq (k+۱)^{۲} - ۱$ و لذا $k \leq \sqrt{x} < \sqrt{y} < k + ۱$. در نتیجه $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < ۱$.

مسألهٔ ۷.۱.۷ ۱۱ عدد حقیقی از بازهٔ $[۰, ۱)$ داده شده است. ثابت کنید به‌ازای دوتا از این اعداد مانند x و y،

$$|x - y| < ۰/۱$$

راه‌حل. اعداد بازهٔ $[۰, ۱)$ را به صورت زیر به ۱۰ قسمت تقسیم می‌کنیم.

$$[۰, ۰/۱) \quad [۰/۱, ۰/۲) \quad [۰/۲, ۰/۳) \quad \ldots \quad [۰/۹, ۱)$$

حال ۱۱ عدد از این ۱۰ دسته در اختیار داریم، پس دوتا از این اعداد در یک دسته قرار دارند. اما تفاضل هر دو عددی که در یک دسته قرار داشته باشند کمتر از ۰/۱ است.

مسألهٔ ۸.۱.۷ ۱۷ زیرمجموعه از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, \ldots, ۵\}$ داده شده است. ثابت کنید اشتراک دوتا از این زیرمجموعه‌ها برابر مجموعهٔ تهی است.

راه‌حل. مجموعهٔ A، ۳۲ زیرمجموعه دارد. این ۳۲ زیرمجموعه را به ۱۶ دستهٔ دوتایی تقسیم می‌کنیم به این صورت که در هر دسته یکی از زیرمجموعه‌های A را به همراه مکملش قرار می‌دهیم. حال ۱۷ زیرمجموعهٔ A از ۱۶ دسته انتخاب شده‌اند، پس دوتا از آن‌ها در یک دسته قرار دارند و لذا دوتا از این ۱۷ زیرمجموعه مکمل یکدیگرند و اشتراک آن‌ها تهی است.

مسألهٔ ۹.۱.۷ در هر خانه از یک جدول ۸×۸ عددی صحیح نوشته شده است طوری که تفاضل اعداد واقع در هر دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند از ۴ بیشتر نیست. ثابت کنید اعداد واقع در دو خانه از این جدول برابرند.

راه‌حل. فرض کنید a کوچکترین و b بزرگترین عدد نوشته شده در جدول باشد. خانه‌هایی را در نظر بگیرید که این دو عدد در آن‌ها نوشته شده‌اند. مسیری را در نظر بگیرید که از خانهٔ شامل a شروع و به خانهٔ شامل b تمام می‌شود و قطعهٔ اول مسیر به موازات محور افقی و قطعهٔ دوم مسیر به موازات محور قائم است.

	a	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
							$\times$
							$\times$
							$\times$
							b

این مسیر شامل حداکثر ۱۵ تا از خانه‌های جدول است. با توجه به فرض تفاضل اعداد واقع در هر دو خانهٔ متوالی در این مسیر از ۴ بیشتر نیست، لذا تفاضل اعداد واقع در خانه‌های ابتدا و انتهای مسیر از ۴×۱۴ بیشتر نیست، پس $b - a \leq ۵۶$. چون a کوچکترین و b بزرگترین عدد واقع در جدول هستند، لذا در جدول حداکثر ۵۷ عدد مختلف وجود دارد. پس در بین ۶۴ عدد موجود در جدول حداقل دوتا با هم برابرند.

مسألهٔ ۷.۱.۱۰ ۱۲ نفر در یک جمع حضور دارند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها در این جمع برابر است.

راه‌حل. ۱۲ نفر را برحسب تعداد دوستانشان در این جمع دسته‌بندی می‌کنیم. تعداد دوستان هر فرد در این جمع یکی از اعداد ۰، ۱، ... و ۱۱ است. پس ۱۲ نفر این جمع به ۱۲ دسته تقسیم می‌شوند. توجه کنید که اگر فردی در این جمع ۱۱ دوست داشته باشد، آنگاه این فرد با همهٔ افراد جمع دوست است و لذا هر فرد در این جمع حداقل یک دوست دارد، پس دستهٔ افرادی که صفر دوست دارند خالی است و اگر هیچ فردی در این جمع ۱۱ دوست نداشته

باشد، آنگاه دستهٔ افرادی که ۱۱ دوست دارند خالی است. پس حداقل یکی از ۱۲ دسته خالی است، لذا ۱۲ نفر این جمع حداکثر به ۱۱ دسته تقسیم می‌شوند. پس بنابر اصل لانه کبوتری دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار دارند و لذا تعداد دوستان این دو نفر در این جمع برابر است.

مسألهٔ ۱۱.۱.۷ ۲۱ نفر در یک آزمون ۵ سؤالی شرکت کرده‌اند. به‌ازای هر پاسخ درست، غلط و نزده به ترتیب ۴ نمرهٔ مثبت، یک نمرهٔ منفی و صفر نمره منظور می‌شود. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که نمرهٔ آن‌ها برابر است.

راه‌حل. افراد شرکت‌کننده در آزمون را برحسب نمره‌ای که به‌دست آورده‌اند دسته‌بندی می‌کنیم. نمرهٔ هر فرد عددی بین ۵− تا ۲۰ است و توجه کنید که نمرهٔ هیچ فردی برابر ۱۹، ۱۸، ۱۷، ۱۴، ۱۳ و ۹ نمی‌تواند باشد. لذا شرکت‌کنندگان در آزمون حداکثر ۲۰ نمرهٔ مختلف می‌توانند داشته باشند و چون ۲۱ نفر در آزمون شرکت کرده‌اند، پس نمرهٔ حداقل دوتا از آن‌ها با هم برابر است.

مسألهٔ ۱۲.۱.۷ فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ۱۰ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ باشد. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ متمایز از S مانند A و B وجود دارند که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است.

راه‌حل. زیرمجموعه‌های S را برحسب مجموع اعضایشان دسته‌بندی می‌کنیم. تعداد زیرمجموعه‌های S برابر $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ است و اگر A زیرمجموعه‌ای از S باشد، آنگاه مجموع اعضای A عددی صحیح و نامنفی است که از ۱۰۰۰ کمتر است. پس ۱۰۲۴ زیرمجموعه از S به حداکثر ۱۰۰۰ دسته تقسیم می‌شوند و لذا دسته‌ای وجود دارد که حداقل دوتا از زیرمجموعه‌های S در آن قرار دارند. مجموع اعضای این دو زیرمجموعه از S با هم برابر است.

مسألهٔ ۱۳.۱.۷ ۵ نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات داده شده است. ثابت کنید نقطهٔ وسط دوتا از این نقاط، نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

راه‌حل. فرض کنید $P = (a, b)$ و $Q = (c, d)$ دو نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات باشند، در این صورت مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه برابر $(\frac{a+c}{۲}, \frac{b+d}{۲})$ است. پس در صورتی این نقطه مختصات صحیح دارد که هر دو عدد $a + c$ و $b + d$ زوج باشند یا معادلاً زوجیت a و c و همچنین زوجیت b و d یکسان باشد.

پس ۵ نقطهٔ داده شده را بر اساس زوجیت هر یک از مؤلفه‌هایشان دسته‌بندی می‌کنیم. چون برای زوجیت مؤلفه‌های نقطه‌ای با مختصات صحیح چهار حالت

(فرد , فرد) , (زوج , فرد) , (فرد , زوج) , (زوج , زوج)

وجود دارد، پس ۵ نقطه به ۴ دسته تقسیم می‌شوند و لذا بنابر اصل لانه کبوتری دسته‌ای وجود دارد که حداقل دوتا از نقاط در آن قرار دارند. نقطهٔ وسط این دو نقطه مختصات صحیح دارد.

مسألهٔ ۱۴.۱.۷ ۲۴۴ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید تفاضل دوتا از این اعداد بر ۲۴۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. در صورتی تفاضل دو عدد بر ۲۴۳ بخش‌پذیر است که باقی‌مانده‌های تقسیم این دو عدد بر ۲۴۳ برابر باشند. پس ۲۴۴ عدد داده شده را برحسب باقی‌ماندهٔ تقسیمشان بر ۲۴۳ دسته‌بندی می‌کنیم. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر ۲۴۳ یکی از اعداد ۰، ۱، ... و ۲۴۲ است، لذا ۲۴۴ عدد به ۲۴۳ دسته تقسیم می‌شوند، پس دسته‌ای وجود دارد که حداقل دوتا از اعداد در آن قرار دارند. تفاضل این دو عدد بر ۲۴۳ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۵.۱.۷ ثابت کنید اعداد طبیعی متمایز a و b وجود دارند که عدد $۲^b - ۲^a$ بر ۱۲۸۷ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. ۱۲۸۸ عدد زیر را در نظر بگیرید.

$$۲^{۱}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, \ldots, ۲^{۱۲۸۸}$$

این اعداد را برحسب باقی‌ماندهٔ تقسیمشان بر ۱۲۸۷ دسته‌بندی می‌کنیم. چون باقی‌ماندهٔ هر عدد صحیح بر ۱۲۸۷ یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... و ۱۲۸۶ است، لذا ۱۲۸۸ عدد فوق به ۱۲۸۷ دسته تقسیم می‌شوند، پس دسته‌ای وجود دارد که شامل حداقل دوتا از این اعداد است. مثلاً فرض کنید اعداد ۲^a و ۲^b در یک دسته قرار داشته باشند، در این صورت باقی‌مانده‌های تقسیم این دو عدد بر ۱۲۸۷ برابرند و لذا $۲^b - ۲^a$ بر ۱۲۸۷ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۶.۱.۷ ثابت کنید اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌طوری‌که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر باشد، قدرمطلق هر یک از ۱۰۰۰ کوچکتر باشد و

$$|a + b\sqrt{۲}| < \frac{۱}{۴۰۰}$$

راه‌حل. کلیهٔ اعداد به صورت $x + y\sqrt{۲}$ را در نظر بگیرید که x و y متعلق به مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, ۹۹۹\}$ باشند. تعداد این اعداد برابر $۱۰۰۰^{۲}$، کوچکترین این اعداد برابر صفر و بزرگترین این اعداد برابر $۹۹۹(۱ + \sqrt{۲})$ است. چون $۹۹۹(۱ + \sqrt{۲}) < ۲۵۰۰$، لذا چنان‌چه بازهٔ $[۰, ۲۵۰۰)$ را به یک میلیون بازه که طول هر یک برابر $\frac{۱}{۴۰۰} = \frac{۲۵۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰}$ باشد تقسیم کنیم، آنگاه حداقل دوتا از این اعداد مثلاً $x_۱ + y_۱\sqrt{۲}$ و $x_۲ + y_۲\sqrt{۲}$ در یک بازه قرار می‌گیرند. در نتیجه

$$|(x_۱ + y_۱\sqrt{۲}) - (x_۲ + y_۲\sqrt{۲})| < \frac{۱}{۴۰۰}$$

فرض کنید $a = x_۱ - x_۲$ و $b = y_۱ - y_۲$، در این صورت $|a + b\sqrt{۲}| < \frac{۱}{۴۰۰}$، همچنین حداقل یکی از a و b ناصفر است و چون $x_۱$، $x_۲$، $y_۱$ و $y_۲$ همگی متعلق به مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, ۹۹۹\}$ هستند، پس

مسألهٔ ۷.۱.۱۷ ۳۵ صندلی به فواصل مساوی دور یک میز دایره‌ای شکل چیده شده است. ۲۶ دانش‌آموز و ۹ معلم روی این صندلی‌ها نشسته‌اند، همچنین ۴ ظرف میوه در مقابل ۴ تا از صندلی‌ها روی میز قرار داده شده است. ثابت کنید می‌توان میز را طوری چرخاند که دست‌کم دو ظرف میوه مقابل معلمین قرار گیرد.

راه‌حل. میز را هر بار به اندازهٔ یک صندلی در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم تا مجدداً وضعیت اولیه به‌دست آید، در این صورت میز در ۳۵ وضعیت مختلف قرار گرفته است. در این ۳۵ وضعیت هر ظرف میوه دقیقاً یک بار جلوی هر معلم قرار گرفته است، پس در مجموع این ۳۵ وضعیت، ظروف میوه ۳۶ بار جلوی معلمین قرار گرفته‌اند، پس وضعیتی وجود دارد که حداقل دوتا از ظروف میوه مقابل معلمین قرار دارند.

مسألهٔ ۷.۱.۱۸ ۸ عدد از مجموعهٔ $A = \{۱۰۰۱, ۱۰۰۲, \ldots, ۱۲۸۰۰۰\}$ داده شده است. ثابت کنید به‌ازای دوتا از این اعداد مانند a و b، نه a بر b بخش‌پذیر است و نه b بر a.

راه‌حل. اعداد مجموعهٔ A را به ۷ دسته به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

$$\{۱۰۰۱, \ldots, ۲۰۰۰\} \quad \{۲۰۰۱, \ldots, ۴۰۰۰\} \quad \{۴۰۰۱, \ldots, ۸۰۰۰\}$$
$$\{۸۰۰۱, \ldots, ۱۶۰۰۰\} \quad \ldots \quad \{۶۴۰۰۱, \ldots, ۱۲۸۰۰۰\}$$

حال ۸ عدد از این ۷ دسته داده شده است، پس دسته‌ای وجود دارد که شامل حداقل دوتا از این اعداد است. مثلاً فرض کنید اعداد a و b متعلق به یک دسته باشند و $a < b$. با توجه به این که در هر دسته بزرگترین عدد از دو برابر کوچکترین عدد کوچکتر است نتیجه می‌گیریم $b < ۲a$، لذا نه a بر b بخش‌پذیر است و نه b بر a.

مسألهٔ ۷.۱.۱۹ ۱۳ عدد حقیقی داده شده است. ثابت کنید دو عدد مانند x و y در میان این اعداد وجود دارند که $۰ \leq \sin(x-y) < \frac{۱}{۲}$

راه‌حل. می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی مانند x عدد صحیح k و عدد حقیقی α وجود دارد که $۰ \leq \alpha < ۲\pi$ و $x = ۲k\pi + \alpha$. فرض کنید ۱۳ عدد داده شده برابر $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۱۳}$ باشند، در این صورت اعداد صحیح $k_۱$، $k_۲$، ... و $k_{۱۳}$ و اعداد حقیقی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و $\alpha_{۱۳}$ وجود دارند که برای هر $۱ \leq i \leq ۱۳$، $۰ \leq \alpha_i < ۲\pi$ و $x_i = ۲k_i\pi + \alpha_i$. بازهٔ $[۰, ۲\pi)$ را به ۱۲ بازه به طول $\frac{\pi}{۶}$ تقسیم می‌کنیم. بنابر اصل لانه کبوتری حداقل دوتا از $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و $\alpha_{۱۳}$، مثلاً α_i و α_j، متعلق به یکی از این ۱۲ بازه هستند. در این صورت $۰ \leq \alpha_i - \alpha_j < \frac{\pi}{۶}$ و لذا $۰ \leq \sin(\alpha_i - \alpha_j) < \frac{۱}{۲}$. همچنین

$$x_i - x_j = ۲(k_i - k_j)\pi + \alpha_i - \alpha_j$$

پس $\sin(x_i - x_j) = \sin(\alpha_i - \alpha_j)$ و لذا $۰ \leq \sin(x_i - x_j) < \frac{۱}{۲}$.

مسألهٔ ۲۰.۱.۷ ۹ خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ به رنگ قرمز در آمده است. مرکزهای هر دو خانهٔ قرمز را با پاره‌خطی به هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید طول دوتا از این پاره‌خط‌ها با هم برابر است.

راه‌حل. تعداد پاره‌خط‌های رسم شده برابر $۳۶ = \binom{۹}{۲}$ است. این پاره‌خط‌ها را بر اساس طولشان دسته‌بندی می‌کنیم. چنان‌چه سطرها و ستون‌های صفحهٔ شطرنجی را به ترتیب با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنیم، فاصلهٔ مرکزهای دو خانهٔ (a, b) و (c, d) (خانهٔ (a, b) یعنی خانه‌ای که در محل تقاطع سطر a و ستون b قرار دارد) برابر $\sqrt{(a-c)^۲ + (b-d)^۲}$ است، پس طول هر یک از ۳۶ پاره‌خط به صورت $\sqrt{p^۲ + q^۲}$ است که در آن $۰ \leq p \leq q \leq ۷$ و در ضمن p و q همزمان صفر نیستند. تعداد زوج‌های (p, q) با این شرایط برابر $۳۵ = ۷ + \binom{۸}{۲}$ است (در $\binom{۸}{۲}$ حالت $p \neq q$ و در ۷ حالت $p = q$). پس ۳۶ پاره‌خط رسم شده حداکثر ۳۵ طول مختلف دارند و لذا طول دوتا از این پاره‌خط‌ها با هم برابر است.

مسائل

۱) ثابت کنید در بین ۳۵ دانش‌آموز یک کلاس دو نفر وجود دارند که حرف اول فامیل آن‌ها یکی است.

۲) ۹ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۶\}$ انتخاب شده است. ثابت کنید در بین این ۹ عدد دو عدد وجود دارند که

الف) مجموع آن‌ها برابر ۱۷ باشد.

ب) تفاضل آن‌ها برابر ۸ باشد.

ج) تفاضل آن‌ها برابر ۲ باشد.

د) نسبت به هم اول باشند.

ه) یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۳) ۱۱ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۴۰\}$ داده شده است. ثابت کنید در بین این ۱۱ عدد دو عدد وجود دارند که تفاضل آن‌ها از ۳ بزرگتر نیست.

۴) ۱۱ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ داده شده است. ثابت کنید مجموع دوتا از این اعداد عددی اول است.

۵) در یک پادگان ۹ سرباز حضور دارند. به مدت ۴۰ شب هر شب دوتا از این ۹ نفر نگهبانی داده‌اند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که حداقل دو شب با هم نگهبانی داده‌اند.

۶) در هر خانه از یک جدول ۵×۵ یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ قرار دارد. ثابت کنید در بین ۱۲ مجموع اعداد واقع در هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر حداقل دو عدد برابر وجود دارد.

۷) ۱۰ عدد از مجموعهٔ $\{۲, ۳, \dots, ۱۰۲۳\}$ داده شده است. ثابت کنید به‌ازای دوتا از این اعداد مانند x و y،

$$y^۲ < x^۲ < ۴y^۲$$

۸) هر نقطه از یک خط با یکی از ۱۷ رنگ موجود رنگ شده است. ثابت کنید روی این خط دو نقطهٔ همرنگ وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها برحسب متر عددی صحیح است.

۹) O، $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{۱۳}$ نقاطی واقع در یک صفحه‌اند. ثابت کنید زاویهٔ بین دوتا از پاره‌خط‌های $OA_۱$، $OA_۲$، ... و $OA_{۱۳}$ کمتر از ۳۰° است.

۱۰) ۱۰ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۹۹۹\}$ داده شده است. ثابت کنید به‌ازای دوتا از این اعداد مانند x و y،

$$|\sqrt[۳]{x} - \sqrt[۳]{y}| < ۱$$

۱۱) ۱۰ مهرهٔ شاه در یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرار دارند. ثابت کنید خانه‌ای از صفحهٔ شطرنجی وجود دارد که توسط حداقل دوتا از این مهره‌ها تهدید می‌شود.

۱۲) ۱۰ نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ داده شده است. ثابت کنید فاصلهٔ دوتا از این نقاط حداکثر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۳) ۱۰ نقطه درون یک مربع به ضلع ۳ داده شده است. ثابت کنید فاصلهٔ دوتا از این نقاط حداکثر برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۴) در یک کشور ۱۷ فرودگاه وجود دارد. از هر فرودگاه این کشور حداقل به ۸ فرودگاه دیگر پرواز مستقیم وجود دارد (پروازها دو طرفه‌اند). ثابت کنید از هر فرودگاه به هر فرودگاه دیگر با حداکثر یک بار تعویض هواپیما می‌توان رفت.

۱۵) ۵۰ نفر در مسابقهٔ پرتاب دارت شرکت کرده‌اند. هر فرد ۱۰ دارت پرتاب می‌کند. امتیاز هر پرتاب یکی از اعداد ۰، ۱، ۲ و ۵ است. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که امتیاز یکسان به‌دست می‌آورند.

۱۶) ۱۴ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید در بین این اعداد دو عدد وجود دارند که

الف) مجموع یا تفاضل آن‌ها بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

ب) مجموع یا تفاضل آن‌ها بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۱۷) ثابت کنید اعداد طبیعی متمایز a و b وجود دارند که عدد $۳^b - ۳^a$ بر ۲۵۳۶ بخش‌پذیر باشد.

۱۸)* ثابت کنید مضربی طبیعی از ۲۵۳۶ وجود دارد که فقط از رقم صفر و یک تشکیل شده است.

۱۹) برای عدد طبیعی n، $\sigma(n)$ را مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n بگیرید. ثابت کنید دو عدد از مجموعهٔ $\{۲^{۱۰۰}, ۲^{۱۰۰} + ۱, \ldots, ۲^{۱۰۰} + ۱۰۰۰\}$ مانند a و b وجود دارند که $\sigma(a) - \sigma(b)$ بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۲۰)* A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, ۲۲۰\}$ است به‌طوری‌که برای هر ۱۰ عدد متوالی از S حداقل یکی عضو A است. ثابت کنید ۴ عدد متمایز در A مانند a، b، c و d وجود دارند که $a + b = c + d$.

۲۱)* ۷ عدد صحیح داده شده است. باقی‌ماندهٔ تقسیم هیچ دوتا از این عددها بر ۲۰ برابر نیست. ثابت کنید در بین این اعداد چهار عدد مانند a، b، c و d وجود دارند که $a + b - c - d$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است.

۲۲)* فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ۱۰ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰\}$ باشد. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ ناتهی و مجزا از S مانند A و B وجود دارند که مجموع اعضای A

با مجموع اعضای B برابر است.

۲۳)* فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ۱۵ عضوی از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲۷\}$ باشد. ثابت کنید اعضای متمایز a، b و c از A وجود دارند به‌طوری‌که $a = b + c$.

۲۴)* ١٦ خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ انتخاب شده است. ثابت کنید مرکزهای چهارتا از این خانه‌ها رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۲۵)* ۸ خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ به رنگ قرمز در آمده است طوری که هیچ دوتا از این خانه‌ها در یک سطر یا یک ستون قرار ندارند. مرکزهای هر دو خانهٔ قرمز را با پاره‌خطی به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید طول دوتا از این پاره‌خط‌ها با هم برابر است.

٢٦)* ۷ عدد حقیقی داده شده است. ثابت کنید دو عدد مانند x و y در میان این اعداد وجود دارند که

$$۰ \leq \sin(x-y) < \frac{۱}{۲}$$

۲۷)* ۹۲ صندلی به فواصل مساوی دور یک میز دایره‌ای شکل چیده شده است. ۹۲ نفر روی این صندلی‌ها نشسته‌اند، همچنین ۱۰ میکروفن در مقابل ۱۰ تا از این افراد روی میز قرار داده شده است. ثابت کنید می‌توان میز را طوری چرخاند که میکروفن‌ها جلوی افرادی قرار گیرند که قبلاً در مقابل هیچ یک میکروفن نبوده است.

۲۸)* ثابت کنید اعداد صحیح a، b و c وجود دارند به‌طوری‌که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر باشد، قدرمطلق هر یک از $۱۰^{٦}$ کوچکتر باشد و

$$|a + b\sqrt{۲} + c\sqrt{۳}| < ۱۰^{-۱۱}$$

۲۹)* ۳۳ دانش‌آموز در یک کلاس حضور دارند. از هر دانش‌آموز دو سؤال پرسیده می‌شود. یکی این که اسم چند دانش‌آموز دیگر از کلاس مانند اسم شماست و دیگر این که فامیل

چند دانش‌آموز دیگر از کلاس مانند فامیل شماست. در میان ٦٦ جواب داده شده کلیهٔ اعداد ۰، ۱، ... و ۱۰ به چشم می‌خورند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که هم اسم آن‌ها یکی است و هم فامیل آن‌ها.

۳۰)* ۸ مربع ۲ × ۲ از یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ جدا شده است. ثابت کنید می‌توان یک مربع ۲ × ۲ دیگر از صفحهٔ شطرنجی جدا کرد.

۳۱)* فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲۰۰۰\}$ باشند به‌طوری‌که $|A||B| \geq ۳۹۹۹$. ثابت کنید اعضای متمایز x و y در A و اعضای متمایز u و v در B وجود دارند به‌طوری‌که

$$x - y = u - v$$

۳۲)* ۱۷ خانه از یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ علامت گذاشته شده است. ثابت کنید دوتا از این خانه‌ها را می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که برای رفتن از یکی به دیگری با مهره اسب حداقل سه حرکت نیاز باشد.

۳۳)* اعداد ۱ تا ۱۰۰ در خانه‌های یک جدول ۱۰ × ۱۰ نوشته شده‌اند. ثابت کنید دو خانه با حداقل یک رأس مشترک وجود دارند به طوری که مجموع اعداد واقع در این دو خانه بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

۳۴) فرض کنید X مجموعه‌ای شامل ۱۰ عدد صحیح باشد. برای هر زیرمجموعه از X مانند A، حاصل‌ضرب اعضای A را با $\pi(A)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید زیرمجموعه‌های متمایز A و B از X وجود دارند که $\pi(A) - \pi(B)$ بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۳۵)* الف) ۱۷ عدد طبیعی در اختیار داریم که به‌جز ۲، ۳، ۵ و ۷ بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نیستند. ثابت کنید حاصل‌ضرب دوتا از این اعداد مربع کامل است.

ب) ۴۹ عدد طبیعی در اختیار داریم که به‌جز ۲، ۳، ۵ و ۷ بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نیستند. ثابت کنید حاصل‌ضرب ۴ تا از این اعداد توان چهارم یک عدد طبیعی است.

۳۶) ۹ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳۶\}$ داده شده است. ثابت کنید در بین تفاضل‌های دوبه‌دوی این ۹ عدد حداقل دوتا برابرند.

۳۷)* فرض کنید هر جمله از دنبالهٔ

$$a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{۱۰۲}$$

برابر یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰ باشد. ثابت کنید اندیس‌های متمایز i و j وجود دارند که

$$a_i = a_j, \quad a_{i+۱} = a_{j+۱}$$

۳۸) در هر خانه از یک جدول ۱۰ × ۱۰ یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۲۰ نوشته شده است. ثابت کنید دو مربع ۲ × ۲ در این جدول وجود دارند که مجموع اعداد واقع در آن‌ها با هم برابر است (مربع‌های ۲ × ۲ می‌توانند خانهٔ مشترک هم داشته باشند).

۳۹)* در هر خانه از یک جدول ۱۶ × ۱۶ یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۷ نوشته شده است. ثابت کنید دو مربع ۲ × ۲ در این جدول وجود دارند که برای هر i، $۱ \leq i \leq ۷$، تعداد خانه‌های شامل عدد i در دو مربع برابر باشد (مربع‌های ۲ × ۲ می‌توانند خانهٔ مشترک هم داشته باشند).

۴۰)* ۹ رأس از یک ۳۵ ضلعی منتظم انتخاب شده است. تمام $\binom{9}{2}$ پاره‌خط بین این ۹ رأس را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید در بین این پاره‌خط‌ها حداقل دو پاره‌خط موازی وجود دارد.

۴۱)* ۱۰۱ مقسوم‌علیه مثبت از 6^{10} انتخاب شده است. ثابت کنید دوتا از این اعداد وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

۴۲) الف) ۳ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید مجموع دوتا از این اعداد بر ۲ بخش‌پذیر است.
ب) ۷ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید مجموع ۴ تا از این اعداد بر ۴ بخش‌پذیر است.

۷—۲ صورت تعمیم‌یافتهٔ اصل لانه کبوتری

قضیهٔ ۱.۲.۷ اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m > nk$، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k + 1$ کبوتر وارد آن شده‌اند.

برهان. اگر حکم درست نباشد، آنگاه در هر لانه حداکثر k کبوتر وارد شده است و لذا حداکثر nk کبوتر وارد لانه‌ها شده‌اند، اما طبق فرض بیش از nk کبوتر وارد لانه‌ها شده‌اند. تناقض حاصل حکم قضیه را نتیجه می‌دهد.

صورت دیگری از قضیهٔ ۱.۲.۷ که معمولاً در حل مسائل از آن استفاده می‌کنیم به صورت زیر است:

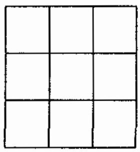
قضیهٔ ۲.۲.۷ اگر m کبوتر وارد n لانه وارد شوند، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ کبوتر وارد آن شده‌اند.

مسألهٔ ۳.۲.۷ در یک جعبه ۱۷ مهره به رنگ‌های سفید، سیاه، قرمز و آبی وجود دارد. ثابت کنید در این جعبه حداقل ۵ مهرهٔ همرنگ وجود دارد.

راه‌حل. مهره‌های داخل جعبه را بر اساس رنگشان دسته‌بندی می‌کنیم، پس ۱۷ مهره به ۴ دسته تقسیم می‌شوند. بنابر اصل لانه کبوتری دسته‌ای وجود دارد که حداقل ۵ = $\lceil \frac{۱۷}{۴} \rceil$ مهره در آن قرار دارند، لذا در جعبه حداقل ۵ مهرهٔ همرنگ وجود دارد.

مسألهٔ ۴.۲.۷ ۲۸ نقطه درون مربعی به ضلع ۳ داده شده است. ثابت کنید مربعی به ضلع واحد وجود دارد که شامل حداقل ۴ تا از این نقاط است.

راه‌حل. مربع به ضلع ۳ را به ۹ مربع به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم. حال ۲۸ نقطه از این ۹ مربع داده شده است، لذا در یکی از این مربع‌ها حداقل ۴ = $\lceil \frac{۲۸}{۹} \rceil$ نقطه وجود دارد.



مسألهٔ ۵.۲.۷ یک بازیکن تنیس در طی ۸ روز ۱۳ بار مسابقه داده است. ثابت کنید دو روز متوالی وجود دارد که این بازیکن طی آن حداقل ۴ بار مسابقه داده است.

راه‌حل. بازی‌هایی را که این بازیکن در دو روز اول انجام داده است در یک دسته، بازی‌هایی را که در روزهای سوم و چهارم انجام داده است در یک دسته، بازی‌هایی را که در روزهای پنجم و ششم انجام داده است در یک دسته و بازی‌هایی را که در دو روز آخر انجام داده است در یک دسته قرار می‌دهیم. پس ۱۳ مسابقه به ۴ دسته تقسیم می‌شوند و لذا دسته‌ای وجود دارد که شامل حداقل ۴ = $\lceil \frac{۱۳}{۴} \rceil$ تا از این مسابقات است. پس دو روز متوالی وجود دارد که بازیکن طی آن حداقل ۴ بار مسابقه داده است.

مسألهٔ ۷.۲.۶ ۲۵ مهرهٔ رخ در ۲۵ خانه از یک صفحهٔ شطرنجی 8×8 قرار داده شده است. ثابت کنید ۴ مهرهٔ رخ وجود دارد که هیچ یک دیگری را تهدید نمی‌کند.

راه‌حل. ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنجی را به ۸ دسته به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۸
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۸	۷
۵	۴	۳	۲	۱	۸	۷	۶
۴	۳	۲	۱	۸	۷	۶	۵
۳	۲	۱	۸	۷	۶	۵	۴
۲	۱	۸	۷	۶	۵	۴	۳
۱	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲

حال ۲۵ مهره در ۸ دسته قرار دارند، لذا دسته‌ای وجود دارد که شامل حداقل $4 = \lceil \frac{25}{8} \rceil$ تا از این مهره‌ها است. با توجه به روش دسته‌بندی مهره‌هایی که در یک دسته قرار دارند یکدیگر را تهدید نمی‌کنند.

مسألهٔ ۷.۲.۷ ۱۰ حرف a و ۹۱ حرف b به ترتیبی دور یک دایره نوشته شده‌اند. ثابت کنید ۱۰ حرف متوالی دور دایره وجود دارد که همگی برابر b هستند.

راه‌حل. ۱۰ حرف a محیط دایره را به ۱۰ بخش تقسیم می‌کنند. حال ۹۱ حرف b در این ۱۰ بخش قرار دارند، لذا بخشی وجود دارد که حداقل $10 = \lceil \frac{91}{10} \rceil$ حرف b در آن قرار دارند.

مسألهٔ ۷.۲.۸ ۸ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 15\}$ داده شده است. ثابت کنید در بین تفاضل‌های دوبه‌دوی این اعداد حداقل ۳ تا برابرند.

راه‌حل. تعداد تفاضل‌های دوبه‌دوی این ۸ عدد برابر $۲۸ = \binom{۸}{۲}$ است. این ۲۸ تفاضل را بر اساس مقدارشان دسته‌بندی می‌کنیم. تفاضل دو عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۵\}$ برابر یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۴ است، لذا ۲۸ تفاضل حداکثر ۱۴ مقدار مختلف دارند. اگر در بین این ۲۸ تفاضل ۳ عدد برابر وجود نداشته باشد، نتیجه می‌گیریم هر یک از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۴ دوبار در بین این ۲۸ تفاضل ظاهر می‌شود. ولی عدد ۱۴ فقط به عنوان یک تفاضل (تفاضل اعداد ۱ و ۱۵) می‌تواند ظاهر می‌شود. تناقض حاصل حکم مسأله را نتیجه می‌دهد.

مسألهٔ ۹.۲.۷ در یک پادگان ۱۳ سرباز حضور دارند. به مدت ۴۰ شب هر شب ۵ تا از سربازها باید نگهبانی بدهند. ثابت کنید دو سرباز وجود دارند که در پایان ۴۰ شب حداقل ۶ شب با هم نگهبانی داده‌اند.

راه‌حل. به‌ازای هر شب به $۱۰ = \binom{۵}{۲}$ طریق می‌توان دو سرباز انتخاب کرد که هر دو در آن شب نگهبانی داده‌اند. پس در پایان ۴۰ شب، ۴۰۰ جفت سرباز وجود دارد که هر دو در یک شب نگهبانی داده‌اند. اما تعداد جفت سربازها برابر $۷۸ = \binom{۱۳}{۲}$ است، لذا در بین ۴۰۰ جفت حداقل $۶ = \lceil \frac{۴۰۰}{۷۸} \rceil$ جفت برابر وجود دارد. پس دو سرباز وجود دارند که حداقل ۶ شب با هم نگهبانی داده‌اند.

مسألهٔ ۱۰.۲.۷ دو ۱۶ ضلعی منتظم قابل انطباق در اختیار داریم. از هر یک از این دو ۱۶ ضلعی، ۷ رأس به رنگ قرمز در آمده است. ثابت کنید این دو ۱۶ ضلعی را می‌توان طوری بر هم منطبق کرد که حداقل در ۴ نقطه رأس‌های قرمز بر یکدیگر قرار گیرند.

راه‌حل. با ثابت نگه داشتن یکی از دو ۱۶ ضلعی و دوران ۱۶ ضلعی دیگر، در ۱۶ وضعیت می‌توانیم دو ۱۶ ضلعی را بر هم منطبق کنیم. در این ۱۶ وضعیت هر رأس از یک ۱۶ ضلعی دقیقاً یک بار بر هر رأس از ۱۶ ضلعی دیگر قرار می‌گیرد. چون هر یک از دو ۱۶ ضلعی ۷ رأس قرمز دارند، لذا در این ۱۶ وضعیت ۴۹ بار رأس‌های قرمز روی یکدیگر قرار می‌گیرند،

پس وضعیتی وجود دارد که حداقل در $۴ = \lceil \frac{۴۹}{۱۶} \rceil$ نقطه رأس‌های قرمز روی یکدیگر قرار دارند.

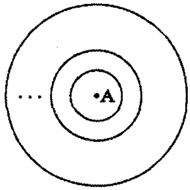
مسألهٔ ۱۱.۲.۷ هر خانه از یک جدول ۴۱×۵ سفید یا سیاه شده است. ثابت کنید سه سطر و سه ستون از این جدول وجود دارد که ۹ خانهٔ واقع در محل تقاطع آن‌ها همرنگ باشند.

راه‌حل. هر ستون از جدول شامل ۵ خانه است که با دو رنگ رنگ شده‌اند. بنابر اصل لانه کبوتری حداقل ۳ خانه از هر ستون همرنگند. یک ستون از جدول را سفید می‌نامیم اگر حداقل ۳ خانه از این ستون سفید باشند و الا این ستون را سیاه می‌نامیم. حال ۴۱ ستون با نام‌های سفید و سیاه وجود دارد، لذا حداقل ۲۱ ستون هم‌نام در این جدول وجود دارد. فرض کنید در جدول ۲۱ ستون سیاه وجود داشته باشد. از هر یک از این ۲۱ ستون ۳ خانهٔ سیاه آن را مشخص کنید. چون تعداد راه‌های سیاه کردن ۳ خانه از یک ستون برابر $۱۰ = \binom{۵}{۳}$ است، پس حداقل در $۳ = \lceil \frac{۲۱}{۱۰} \rceil$ ستون نحوهٔ قرار گرفتن ۳ خانهٔ مشخص‌شده یکسان است. پس سه سطر و سه ستون وجود دارد که ۹ خانهٔ محل تقاطع آن‌ها سیاه هستند.

مسألهٔ ۱۲.۲.۷ ۲۰۲ نقطه در صفحه داده شده است. ثابت کنید در بین فاصله‌های بین دوبه‌دوی این نقاط حداقل ۱۱ عدد متمایز وجود دارد.

راه‌حل. فرض کنید حکم درست نباشد و فاصلهٔ بین هر دو نقطه از نقاط داده شده برابر یکی از اعداد $d_۱$، $d_۲$، ... و $d_{۱۰}$ باشد. یکی از نقاط مانند A را در نظر می‌گیریم. به مرکز A ده دایره به شعاع‌های $d_۱$، $d_۲$، ... و $d_{۱۰}$ رسم می‌کنیم. هر یک از ۲۰۱ نقطهٔ باقی‌مانده روی یکی از این دایره‌ها قرار دارند، لذا بنابر اصل لانه کبوتری دایره‌ای وجود دارد که شامل حداقل

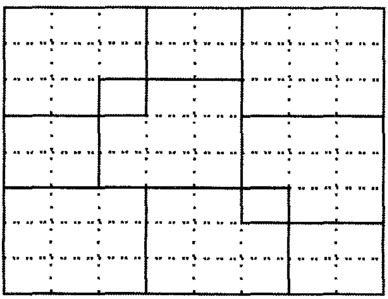
$۲۱ = \lceil \frac{۲۰۱}{۱۰} \rceil$ تا از این نقاط است.



فرض کنید دایرهٔ C شامل نقاط $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۲۱}$ و B نقطه‌ای (از بین ۲۰۲ نقطه) غیر از A، $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۲۱}$ باشد. به مرکز B نیز ۱۰ دایره به شعاع‌های $d_۱$، $d_۲$، ... و $d_{۱۰}$ رسم می‌کنیم. هر یک از $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۲۱}$ روی یکی از این دایره‌ها قرار دارند، پس دایره‌ای مانند C' وجود دارد که شامل حداقل $۳ = \lceil \frac{۲۱}{۱۰} \rceil$ تا از این ۲۱ نقطه است. در نتیجه دایره‌های C و C' دست‌کم سه نقطهٔ مشترک دارند، در صورتی که دو دایرهٔ متمایز حداکثر دو نقطهٔ مشترک می‌توانند داشته باشند. تناقض حاصل حکم مسأله را نتیجه می‌دهد.

مسألهٔ ۱۳.۲.۷ ۴۳ خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ به رنگ قرمز درآمده‌اند. ثابت کنید مربعی ۳×۳ وجود دارد که حداقل ٦ خانه از آن قرمز شده‌اند.

راه‌حل. ٦ مربع ۳×۳ در صفحهٔ شطرنجی همانند شکل زیر در نظر بگیرید.



این ٦ مربع ۱۲ خانه از صفحهٔ شطرنجی را نمی‌پوشانند، لذا حداقل ۳۱ خانهٔ قرمز در این ٦ مربع وجود دارد. پس مربعی وجود دارد که حداقل $٦ = \lceil \frac{۳۱}{٦} \rceil$ خانهٔ قرمز دارد.

مسألهٔ ۱۴.۲.۷ وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می‌کنند. هر جاده دو شهر را به یکدیگر وصل می‌کند و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده وجود دارد. هر شرکت وظیفهٔ مرمت ۳۰ جاده را عهده‌دار می‌شود. در ضمن یک شرکت در صورتی می‌تواند یک جاده را مرمت کند که در دو شهر منتهی به این جاده نمایندگی داشته باشد. ثابت کنید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند. (المپیاد ریاضی ایران ـ اردیبهشت ۱۳۸۳)

راه‌حل. یک شرکت را در نظر بگیرید و فرض کنید این شرکت در k شهر نمایندگی داشته باشد. در این صورت این شرکت فقط جاده‌های بین این k شهر را می‌تواند مرمت کند. چون بین هر دو شهر حداکثر یک جاده وجود دارد، لذا بین این k شهر حداکثر $\binom{k}{۲}$ جاده وجود دارد. درنتیجه $۳۰ \geq \binom{k}{۲}$، پس $k \geq ۹$. یعنی هر شرکت باید حداقل در ۹ شهر نمایندگی داشته باشد. درنتیجه ۸۰ شرکت حداقل ۷۲۰ نمایندگی در شهرهای کشور دارند، لذا شهری وجود دارد که حداقل $۸ = \lceil \frac{۷۲۰}{۱۰۰} \rceil$ تا از نمایندگی‌ها در آن قرار دارند.

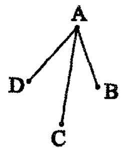
مسألهٔ ۱۵.۲.۷ ۱۰۰ مجموعهٔ ۱۰ عضوی داده شده است. می‌دانیم به‌ازای هر ۳ تا از این مجموعه‌ها اشتراک حداقل دوتا از آن‌ها ناتهی است. ثابت کنید عضوی وجود دارد که حداقل به ٦ تا از این مجموعه‌ها تعلق دارد.

راه‌حل. فرض کنید A یکی از این ۱۰۰ مجموعه باشد. اگر اشتراک هر یک از ۹۹ مجموعهٔ باقی‌مانده با A ناتهی باشد، آنگاه هر یک از این مجموعه‌ها شامل حداقل یکی از ۱۰ عضو A هستند و لذا عضوی از A وجود دارد که حداقل به $۱۰ = \lceil \frac{۹۹}{۱۰} \rceil$ تا از این مجموعه‌ها تعلق دارد. پس فرض کنید مجموعه‌ای مانند B وجود داشته باشد که $A \cap B = \emptyset$. بنابر فرض اشتراک هر یک از ۹۸ مجموعهٔ باقی‌مانده با حداقل یکی از A و B ناتهی است، لذا هر یک از این مجموعه‌ها شامل حداقل یکی از ۲۰ عضو $A \cup B$ هستند، پس عضوی از $A \cup B$ وجود دارد که حداقل به $۵ = \lceil \frac{۹۸}{۲۰} \rceil$ تا از این ۹۸ مجموعه تعلق دارد، در ضمن این عضو در

یکی از A و B نیز قرار دارد و لذا متعلق به حداقل ٦ مجموعه از ۱۰۰ مجموعهٔ داده شده است.

مسألهٔ ۱٦.۲.۷ هر یک از اضلاع و اقطار یک شش‌ضلعی را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید سه رأس از این شش‌ضلعی وجود دارد که پاره‌خطهای بین این سه رأس همرنگند.

راه‌حل. فرض کنید A یکی از رأس‌های شش‌ضلعی باشد. از A، ۵ پاره‌خط به رأس‌های دیگر شش‌ضلعی خارج می‌شود. بنابر اصل لانه کبوتری حداقل $۳ = \lceil \frac{۵}{۲} \rceil$ تا از این پاره‌خطها همرنگند. مثلاً فرض کنید پاره‌خطهای AB، AC و AD به رنگ آبی باشند.



اگر یکی از پاره‌خطهای BC، BD و CD به رنگ آبی باشد حکم مسأله نتیجه می‌شود و الا هر سه پاره‌خط به رنگ قرمزند که در این حالت نیز حکم مسأله نتیجه می‌شود.

مسائل

۱) بیش از ۴۰۰ دانش‌آموز یک دبیرستان در امتحانات نهایی معدلی بالاتر از ۱۵ آورده‌اند. ثابت کنید ۹ نفر وجود دارند که اختلاف معدل بین هر دوتا از آن‌ها کمتر از ۰٫۱ است.

۲) ۹۷ سکه در طی ۱۲ روز به داخل قلک انداخته شده است. ثابت کنید سه روز متوالی وجود دارد که طی آن حداقل ۲۵ سکه داخل قلک انداخته شده است.

۳) ۶۵ نقطه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد داده شده است. ثابت کنید ۵ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ بین هر دوتا از آن‌ها از $\frac{1}{4}$ بیشتر نیست.

۴) یک تیم فوتبال ۲۳ بازیکن دارد. این تیم در سال گذشته ۶۰ بار مسابقه داده است. در هر مسابقه ۱۱ تا از بازیکنان در زمین حضور داشته‌اند. ثابت کنید سه بازیکن وجود دارند که حداقل در ۶ مسابقه با هم درون زمین بوده‌اند.

۵) ۱۱ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 20\}$ داده شده است. ثابت کنید در بین تفاضل‌های دوبه‌دوی این اعداد حداقل ۴ تا برابرند.

۶) ۲۰ نفر در یک مهمانی حضور دارند. هر فرد در این مهمانی با تعداد فردی از افراد حاضر در مهمانی دوست است. ثابت کنید سه نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها در مهمانی با هم برابر است.

۷) ۳۳ خانه از صفحهٔ شطرنجی 8×8 با رنگ قرمز رنگ شده است. ثابت کنید مربعی 2×2 وجود دارد که حداقل سه خانهٔ آن رنگ شده باشد.

۸) ۲۳ مسابقه بین ۱۵ تیم فوتبال انجام شده است. ثابت کنید تیمی وجود دارد که حداقل ۴ بازی انجام داده است.

۹) در هر خانه از یک جدول 10×10 عددی صحیح قرار دارد به‌طوری‌که اعدادی که در خانه‌های مجاور ضلعی قرار دارند حداکثر یک واحد اختلاف دارند. ثابت کنید عددی وجود دارد که حداقل در ۶ خانه از جدول آمده است.

۱۰)* اعداد ۱ تا ۱۰۰ در خانه‌های یک جدول 10×10 نوشته شده‌اند. ثابت کنید دو خانه با حداقل یک رأس مشترک وجود دارد که اختلاف اعداد واقع در آن‌ها حداقل برابر ۱۱ است.

۱۱)* در هر خانه از یک جدول ۸ × ۸ یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۵۷ نوشته شده است. در ضمن هر یک از این ۵۷ عدد حداقل در یکی از خانه‌های جدول نوشته شده‌اند. ثابت کنید ۸ خانه از جدول وجود دارند که هیچ دوتا در یک سطر یا یک ستون نباشند و اعداد واقع در آن‌ها دوبه‌دو متمایز باشند.

۱۲)* ۳۵ رأس از یک ۱۰۰ ضلعی منتظم به رنگ قرمز و بقیه رأس‌ها به رنگ آبی هستند. ثابت کنید دو ۲۳ ضلعی قابل انطباق وجود دارد که رأس‌های یکی قرمز و رأس‌های دیگری آبی باشند.

۱۳)* ۸ دانش‌آموز در یک امتحان ۸ مسأله‌ای شرکت کردند. اگر هر مسأله توسط ۵ دانش‌آموز حل شده باشد، ثابت کنید دو نفر وجود دارند که هر مسأله توسط حداقل یکی از آن‌ها حل شده است.

۱۴)* هر خانه از یک جدول ۲۰۵ × ۷ سفید یا سیاه شده است. ثابت کنید چهار سطر و چهار ستون از این جدول وجود دارند که ۱۶ خانهٔ واقع در محل تقاطع آن‌ها همرنگ است.

۱۵)* ۲۱۲ نقطه در صفحه داده شده است. ثابت کنید در بین فاصله‌های بین دوبه‌دوی این نقاط حداقل ۱۵ عدد متمایز وجود دارد.

۱۶)* بیش از یک میلیون نقطه در فضا داده شده است. ثابت کنید در بین فاصله‌های بین دوبه‌دوی این نقاط حداقل ۷۹ عدد متمایز وجود دارد. (المپیاد ریاضی ایران ـ اردیبهشت ۱۳۸۴)

۱۷)* ۴۶ خانه از یک صفحهٔ شطرنجی ۹ × ۹ به رنگ قرمز درآمده‌اند. ثابت کنید مربعی ۲ × ۲ وجود دارد که حداقل ۳ خانه از آن قرمز شده‌اند.

۱۸)* ۱۰۰ مجموعهٔ ۱۰ عضوی داده شده است. می‌دانیم به‌ازای هر ۴ تا از این مجموعه‌ها اشتراک حداقل دوتا از آن‌ها ناتهی است. ثابت کنید عضوی وجود دارد که حداقل به

۵ تا از این مجموعه‌ها تعلق دارد.

۱۹)* ۱۰۰ مجموعهٔ ۱۰ عضوی داده شده است. می‌دانیم هر دوتا از این مجموعه‌ها دقیقاً یک عضو مشترک دارند. ثابت کنید عضوی وجود دارد که متعلق به هر ۱۰۰ مجموعه است.

۲۰)* فرض کنید $a_۱a_۲\ldots a_{۱۰۰}$ جایگشتی از اعداد مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۱۰۰\}$ باشد. ثابت کنید در بین باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد

$$a_۱, a_۱+a_۲, a_۱+a_۲+a_۳, \ldots, a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۰۰}$$

بر ۱۰۰ حداقل ۱۱ عدد متمایز وجود دارد.

۲۱)* هر نقطه از صفحهٔ مختصات با یکی از n رنگ موجود رنگ شده است. ثابت کنید r خط افقی و s خط عمودی وجود دارند که تمام rs نقطهٔ محل تقاطع این خطوط همرنگ‌اند.

۲۲)* هر نقطه از صفحه با یکی از n رنگ موجود رنگ شده است. ثابت کنید برای هر $m \geq ۳$ بی‌نهایت m ضلعی قابل انطباق در صفحه وجود دارد که همهٔ رأس‌های آن‌ها همرنگ‌اند.

۲۳)* یک صفحهٔ شطرنجی ۱۰×۱۰ با ۵۵ موزاییک ۲×۲ به‌طور کامل پوشیده شده است (هر موزاییک ۲×۲، ۴ خانه از صفحهٔ شطرنجی را پوشانده است). ثابت کنید می‌توان یک موزاییک را برداشت به‌طوری‌که ۵۴ موزاییک باقی‌مانده همچنان میز را به طور کامل پوشانده باشند.

۲۴)* یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ توسط خطوط موازی اضلاع به ۱۰۰ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تقسیم شده است. ۱۱۱ تا از اضلاع مثلث‌های به ضلع

واحد با رنگ قرمز رنگ شده‌اند. ثابت کنید مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد وجود دارد که هر ۳ ضلع آن قرمز شده‌اند.

۲۵) ٦۰ نفر در یک جمع حضور دارند. در میان هر ۱۰ نفر از این جمع حداقل ۳ نفر اسم یکسان دارند. ثابت کنید در این جمع ۱۵ نفر وجود دارند که اسم آن‌ها یکسان است.

۲٦) هر یک از اضلاع و اقطار یک ۱۷ ضلعی را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید سه رأس از این ۱۷ ضلعی وجود دارد که پاره‌خط‌های بین این سه رأس همرنگ‌اند.

۲۷)* هر یک از اضلاع و اقطار یک ۱۰ ضلعی را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید یا سه رأس وجود دارد که پاره‌خط‌های بین این سه رأس آبی و یا چهار رأس وجود دارد که پاره‌خط‌های بین این ۴ رأس قرمزند.

۲۸) از بین اضلاع و اقطار یک ۲۴ ضلعی منتظم ۴۹ پاره‌خط انتخاب شده است. ثابت کنید سه‌تا از این پاره‌خط‌ها موازی‌اند.

۲۹)* ۱۳ رأس از یک ۳۰ ضلعی منتظم با رنگ قرمز رنگ شده‌اند. ثابت کنید مثلثی متساوی‌الساقین وجود دارد که هر سه رأس آن قرمزند.

۳۰)* الف) ۵ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید مجموع ۳ تا از این اعداد بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) ۱۱ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید مجموع ٦ تا از این اعداد بر ٦ بخش‌پذیر است.

۳۱)* ۱۳ نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات داده شده است به‌طوری‌که هیچ سه‌تا از آن‌ها روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید مثلثی با رأس‌های متعلق به این ۱۳ نقطه وجود دارد که مرکز ثقل آن نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

۳۲)* ۱۵ شطرنج‌باز در یک دوره مسابقه شرکت کردند. در پایان معلوم شد که هر بازیکن ۳، ۴، ۵، ۷ یا ۸ بازی انجام داده است. ثابت کنید ۴ بازیکن وجود دارند که تعداد بازی‌هایی که انجام داده‌اند با هم برابر است.

۳۳) ۱۵ نقطه در صفحه داده شده است. در بین هر ۳ تا از این نقاط دو نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها کمتر از یک متر است. ثابت کنید دایره‌ای به شعاع یک متر وجود دارد که شامل حداقل ۸ تا از این نقاط است.

۳۴)* فرض کنید A_1، A_2، ... و A_{25} مجموعه‌هایی ۴ عضوی باشند به‌طوری‌که هر دوتا حداقل یک عضو مشترک داشته باشند. ثابت کنید عضوی وجود دارد که متعلق به حداقل ۸ تا از A_i ها است.

۳۵) ۴۴ خانه از یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ به رنگ قرمز درآمده‌اند. ثابت کنید سه خانهٔ متوالی در یک سطر یا یک ستون وجود دارند که همگی به رنگ قرمز باشند.

۳۶) ۲۶ خانه از یک صفحه شطرنجی ۷ × ۷ به رنگ قرمز درآمده‌اند. ثابت کنید مستطیلی ۳ × ۲ وجود دارد که حداقل ۴ خانه از آن به رنگ قرمز باشند.

۳۷) ثابت کنید در هر $2k$ ضلعی محدب قطری وجود دارد که با هیچ یک از اضلاع آن موازی نیست. (المپیاد ریاضی لنین‌گراد ـ ۱۹۷۴)

۳۸)* فراز سیاره‌ای که به شکل یک کره است، ۳۷ ماهواره که هر کدام را یک نقطه به‌حساب می‌آوریم، پرواز می‌کنند. ثابت کنید در هر لحظه می‌توان نقطه‌ای روی سیاره پیدا کرد که از آن جا بیش از ۱۷ ماهواره دیده نشود. (المپیاد ریاضی لنین‌گراد ـ ۱۹۷۴)

فصل ۸

استقرای ریاضی

استقرای ریاضی یکی از مهم‌ترین روش‌های حل مسائل ریاضی است. در این فصل انواع مختلف استقرای ریاضی را معرفی می‌کنیم و با حل مسائل متنوع روش‌های استفاده از آن‌ها را آموزش می‌دهیم.

۸—۱ استقرای ضعیف

فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد. اگر این حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد، می‌گوییم $P(n)$ درست است و در غیر این صورت می‌گوییم $P(n)$ غلط است. مثلاً نابرابری $n^۲ < ۲^n$ به‌ازای $n = ۳$ غلط و به‌ازای $n = ۵$ درست است، پس اگر $P(n)$ نابرابری $n^۲ < ۲^n$ باشد، آنگاه $P(۳)$ غلط و $P(۵)$ درست است.

قضیهٔ ۱.۱.۸ (استقرای ضعیف) فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد و

۱) $P(۱)$ درست باشد.

۲) اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k + ۱)$ نیز درست باشد،

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد n طبیعی درست است.

درک درستی قضیهٔ ۱.۱.۸ بسیار ساده است. از شرط (۱) درستی $P(۱)$ نتیجه می‌شود. از شرط (۲) و درستی $P(۱)$، درستی $P(۲)$ نتیجه می‌شود، مجدداً از شرط (۲) و درستی $P(۲)$، درستی $P(۳)$ نتیجه می‌شود و به همین صورت نتیجه می‌گیریم $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است. حال ببینیم چگونه می‌توان از این قضیه در حل مسائل استفاده کرد.

مسألهٔ ۲.۱.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

راه‌حل. فرض کنید $P(n)$ حکم مورد نظر باشد. ثابت می‌کنیم $P(n)$ در شرایط (۱) و (۲) از قضیهٔ ۱.۱.۸ صدق می‌کند.

(۱) به‌ازای $n = ۱$ تساوی فوق به صورت $\frac{۱\times(۱+۱)}{۲} = ۱$ در می‌آید که درست است؛ پس $P(۱)$ درست است.

(۲) فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $P(k)$ درست باشد؛ در این صورت

$$۱ + ۲ + \cdots + k = \frac{k(k + ۱)}{۲}$$

به طرفین این تساوی عدد $k + ۱$ را اضافه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$۱ + ۲ + \cdots + k + (k + ۱) = \frac{k(k + ۱)}{۲} + (k + ۱) = \frac{(k + ۱)(k + ۲)}{۲}$$

و این دقیقاً همان $P(k + ۱)$ است. پس نشان دادیم که اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k + ۱)$ نیز درست است.

حال از قضیهٔ ۱.۱.۸ نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است.

مسألهٔ ۳.۱.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $۹^n + ۸n - ۱$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. حکم را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. به‌ازای $n = ۱$،

$$۹^n + ۸n - ۱ = ۱۶$$

پس $P(1)$ درست است. فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $P(k)$ درست باشد، در این صورت عدد صحیح t وجود دارد که $9^k + 8k - 1 = 16t$. در نتیجه

$$\begin{aligned} 9^{k+1} + 8(k+1) - 1 &= 9 \times 9^k + 8k + 7 = 9(16t - 8k + 1) + 8k + 7 \\ &= 9 \times 16t - 64k + 16 = 16(9t - 8k + 1) \end{aligned}$$

پس $P(k+1)$ درست است.

حال از قضیهٔ ۱.۱.۸ نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است.

به نابرابری

$$2^n < n!$$

توجه کنید. این نابرابری به‌ازای $n = 1, 2, 3$ درست نیست ولی به‌ازای $n = 4, 5, 6, 7$ درست است. معقول است که حدس بزنیم این نابرابری به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq 4$، درست باشد. برای اثبات این حدس نیز از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۱.۸ (استقرای ضعیف ابتدا از m) فرض کنید m عددی صحیح و $P(n)$ حکمی در مورد عدد صحیح n باشد و

۱) $P(m)$ درست باشد.

۲) اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq m$، $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+1)$ نیز درست باشد،

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد صحیح n، $n \geq m$، درست است.

مسألهٔ ۵.۱.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq 4$، ثابت کنید

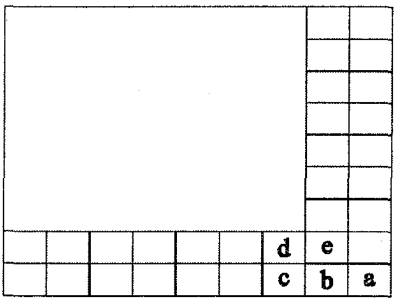
$$2^n < n!$$

راه‌حل. حکم را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. چون $16 = 2^4$ و $24 = 4!$، پس $P(4)$ درست است. فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq 4$، $P(k)$ درست باشد،

دراین‌صورت $k! > ۲^k$. چون $k \geq ۴$، پس $k + ۱ > ۲$. با ضرب طرفین این نابرابری در نابرابری $k! > ۲^k$ نتیجه می‌گیریم $(k+۱)! > ۲^{k+۱}$. پس $P(k+۱)$ درست است.
حال از قضیهٔ ۴.۱.۸ نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۴$، درست است.

مسألهٔ ۶.۱.۸ در هر خانه از یک جدول $(۲n - ۱) \times (۲n - ۱)$ عددی حقیقی نوشته شده است که قدرمطلق آن از ۱ تجاوز نمی‌کند. در ضمن مجموع اعداد واقع در هر مربع ۲×۲ از این جدول برابر صفر است. ثابت کنید مجموع اعداد واقع در جدول از $۲n - ۱$ بیشتر نیست.

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. حال جدولی $(۲k + ۱) \times (۲k + ۱)$ در نظر بگیرید که ویژگی‌های گفته شده در صورت مسأله را داشته باشد. با توجه به درستی حکم برای $n = k$ مجموع اعداد واقع در جدول $(۲k - ۱) \times (۲k - ۱)$ که در گوشهٔ سمت چپ و بالای جدول قرار دارد از $۲k - ۱$ بیشتر نیست. حال اعداد واقع در دو سطر پایین و دو ستون سمت راست جدول را در نظر بگیرید. چون مجموع اعداد در هر مربع ۲×۲ برابر صفر است، لذا مجموع اعداد واقع در این دو سطر و دو ستون برابر $a + b + c + d$ است (شکل زیر را ملاحظه کنید).



چون اعداد b، c، d و e در یک مربع ۲×۲ قرار دارند، پس $b + c + d + e = ۰$ و لذا مجموع اعداد واقع در دو سطر و دو ستون آخر جدول برابر $a - e$ است. چون قدرمطلق هر یک از a و e از ۱ تجاوز نمی‌کند، پس $a - e \leq ۲$ و در نتیجه مجموع اعداد جدول از $(۲k - ۱) + ۲ = ۲k + ۱$ بیشتر نیست. پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است.

مسألهٔ ۷.۱.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید عددی n رقمی با ارقام ۱ و ۲ وجود دارد که بر ۲^n بخش‌پذیر است.

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ عدد ۲ ویژگی‌های مورد نظر را دارد، پس حکم به‌ازای $n = ۱$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، پس عددی k رقمی مانند A با ارقام ۱ و ۲ وجود دارد که بر ۲^k بخش‌پذیر باشد. فرض کنید $A = ۲^k \times m$ و B و C اعداد $k + ۱$ رقمی باشند که به ترتیب از قراردادن رقم ۱ و ۲ در سمت چپ عدد A به‌دست آمده‌اند. در این صورت

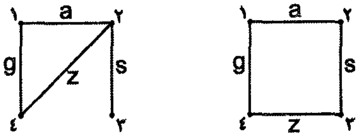
$$B = ۱۰^k + A = ۱۰^k + ۲^k \times m = ۲^k(۵^k + m),$$
$$C = ۲ \times ۱۰^k + A = ۲ \times ۱۰^k + ۲^k \times m = ۲^k(۲ \times ۵^k + m)$$

اگر m عددی فرد باشد، B و اگر m عددی زوج باشد، C بر $۲^{k+۱}$ بخش‌پذیر است. پس در هر صورت عددی $k + ۱$ رقمی با ارقام ۱ و ۲ وجود دارد که بر $۲^{k+۱}$ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است.

مسألهٔ ۸.۱.۸ n کامپیوتر، $n \geq ۴$، در اختیار داریم. بین هر دو کامپیوتر سیمی وجود دارد. هر سیم به یکی از چهار رنگ آبی، قرمز، زرد و سبز است. در ضمن از هر یک از این چهاررنگ حداقل یک سیم وجود دارد. ثابت کنید می‌توان تعدادی کامپیوتر انتخاب کرد به‌طوری‌که سیم‌های بین این کامپیوترها دقیقاً ۳ رنگ مختلف داشته باشند. (المپیاد ریاضی روسیه ـ ۲۰۰۴)

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $n = ۴$. چهار سیم از رنگ‌های مختلف در نظر بگیرید. این چهار سیم به یکی از دو صورتی که در شکل زیر نشان

داده شده است بین چهار کامپیوتر قرار دارند.



در شکل سمت چپ سیم‌های بین کامپیوترهای ۱، ۲ و ۴ دقیقاً ۳ رنگ مختلف دارند. در شکل سمت راست اگر سیم بین کامپیوترهای ۲ و ۴ به رنگ زرد (Z) یا سبز (S) باشد سیم‌های بین کامپیوترهای ۱، ۲ و ۴، و در غیر این صورت سیم‌های بین کامپیوترهای ۲، ۳ و ۴ دقیقاً ۳ رنگ مختلف دارند. پس حکم به‌ازای $n = ۴$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$، $k \geq ۴$، درست باشد و $k + ۱$ کامپیوتر در نظر بگیرید که شرایط گفته شده در صورت مسأله را داشته باشند. فرض کنید A یکی از این $k + ۱$ کامپیوتر باشد. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: سیم‌های بین k کامپیوتر غیر از A چهار رنگ مختلف داشته باشند. چون حکم به‌ازای $n = k$ درست است، لذا تعدادی کامپیوتر در بین این k کامپیوتر وجود دارد که سیم‌های بین این کامپیوترها دقیقاً ۳ رنگ مختلف دارند.

حالت دوم: سیم‌های بین k کامپیوتر غیر از A دقیقاً ۳ رنگ مختلف داشته باشند. در این حالت همین k کامپیوتر ویژگی‌های مورد نظر در حکم مسأله را دارند.

حالت سوم: سیم‌های بین k کامپیوتر غیر از A حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند. فرض کنید هیچ سیمی بین این k کامپیوتر به رنگ زرد یا سبز نباشد، در این صورت سیم‌های زرد و سبز فقط در بین سیم‌های متصل به A وجود دارند. فرض کنید سیم بین کامپیوترهای A و B زرد و سیم بین کامپیوترهای A و C سبز باشد، در این صورت سیم‌های بین کامپیوترهای A، B و C دقیقاً ۳ رنگ مختلف دارند.

پس در هر صورت حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است و لذا حکم به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۴$، درست است.

مسائل

۱) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

الف) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ب) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ج) $1\times 1!+2\times 2!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

د) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

ه) $\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

و) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

۲) به‌ازای هر دو عدد صحیح و نامنفی m و n ثابت کنید

$$\frac{m!}{0!}+\frac{(m+1)!}{1!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}=\frac{(m+n+1)!}{(m+1)n!}$$

۳) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $4^n+15n-1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۴) به‌ازای هر $n\geq 0$ ثابت کنید $2^{3^n}+1$ بر 3^{n+1} بخش‌پذیر است.

۵) به‌ازای هر $n\geq 0$ ثابت کنید $3\times 8^{n+2}-5^{2n+1}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۶) ثابت کنید مجموع مکعبات هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۹ بخش‌پذیر است.

۷) به‌ازای هر $n\geq 3$ ثابت کنید $3^n\geq n^3$.

۸) به‌ازای هر دو عدد طبیعی m و n ثابت کنید $2^{m+n-2}\geq mn$.

۹) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

$$\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

۱۰) فرض کنید x عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد به‌طوری‌که $x > -۱$، $x \neq ۰$ و $n \geq ۲$. ثابت کنید $(۱ + x)^n > ۱ + nx$.

۱۱) به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

$$۲^{n-۱}(۵^n + ۶^n) \geq ۱۱^n$$

۱۲)* از یک صفحهٔ شطرنجی $(۶n + ۱) \times (۶n + ۱)$ یک خانه حذف شده است. ثابت کنید بقیهٔ شکل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل  فرش کرد.

۱۳)* n خط راست که هیچ دوتا موازی نیستند و هیچ سه‌تا از یک نقطه نمی‌گذرند در صفحه رسم شده است. ثابت کنید این n خط صفحه را به $\frac{n^۲+n+۲}{۲}$ ناحیه تقسیم می‌کنند.

۱۴) به‌ازای هر $n \geq ۲۴$ ثابت کنید اعداد صحیح و نامنفی x و y وجود دارند که $۵x + ۷y = n$.

۱۵) $n - ۱$ خانه از یک جدول $n \times n$ را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید با جابه‌جایی سطرها و جابه‌جایی ستون‌های این جدول می‌توان به جدولی رسید که همهٔ خانه‌های علامت‌دار آن زیر قطر اصلی جدول باشند. (المپیاد ریاضی شوروی ـ ۱۹۸۲)

۱۶) فرض کنید $a_۱ = ۱$ و به‌ازای هر $n \geq ۲$، $a_n = ۳a_{n-۱} + ۲$. به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $a_n = ۲ \times ۳^{n-۱} - ۱$.

۱۷) به‌ازای هر $n \geq ۲$ ثابت کنید اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n وجود دارند که برای هر i، $۱ \leq i \leq n$، $\frac{a_۱a_۲\ldots a_n}{a_i} + ۱$ بر a_i بخش‌پذیر باشد.

۱۸)* هر خانه از یک جدول $۲n \times ۲n$ با یکی از چهار رنگ موجود رنگ شده است به‌طوری‌که در هر مربع ۲×۲ هیچ دو خانه‌ای همرنگ نیستند. ثابت کنید هیچ دوتا از ۴ خانهٔ واقع در گوشه‌های جدول نیز همرنگ نیستند.

۱۹)* ثابت کنید جدولی $۲^n \times ۲^n$ با اعداد ۰ و ۱ وجود دارد به‌طوری‌که هر دو سطر این جدول دقیقاً در $۲^{n-۱}$ مرتبه اختلاف داشته باشد. مثلاً جدول زیر این ویژگی را دارد.

۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱

۲۰)* به‌ازای هر $n \geq ۲$ ثابت کنید جدولی $(۱ - ۲^n) \times ۲^n$ با اعداد ۰ و ۱ وجود دارد به‌طوری‌که اگر هر دو ستون این جدول را کنار یکدیگر بگذاریم تعداد ۱۱، ۰۰، ۰۱ و ۱۰ های ظاهر شده برابر باشند. مثلاً جدول زیر این ویژگی را دارد.

۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

۲۱) ثابت کنید مجموع بزرگترین مقسوم‌علیه فرد اعداد $n + ۱$، $n + ۲$، ... و $۲n$ برابر $n^۲$ است. (تورنمنت شهرها ـ ۲۰۰۳)

۲۲)* ۲^n مهره در خانه‌های یک جدول $n \times ۲$ قرار دارند. در هر مرحله می‌توانیم ۲ مهره را که در یک خانه از جدول قرار دارند برداشته، یکی را در خانهٔ مجاور سمت راست یا خانهٔ بالای آن قرار دهیم و دیگری را بیرون بیاندازیم. ثابت کنید می‌توان این عمل را طوری تکرار کرد که در نهایت حداقل یک مهره در خانهٔ گوشهٔ سمت راست و بالای جدول قرار گیرد. (المپیاد ریاضی ایران ـ اردیبهشت ۱۳۸۴)

۲۳)* فرض کنید $n = ۲^k$. ثابت کنید جدولی $n \times n$ با اعداد مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, \ldots, ۲n - ۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر i، $۱ \leq i \leq n$، اجتماع اعداد واقع در سطر i ام و ستون i ام برابر A باشد.

۲۴)* 2^n نقطه در فضا داده شده است به‌طوری‌که هیچ سه‌تا از آن‌ها روی یک خط راست قرار ندارند. کلیهٔ پاره‌خط‌های بین دو به دوی این نقاط را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان هر یک از این پاره‌خط‌ها را با یکی از رنگ‌های c_1، c_2، ... و c_n رنگ کرد به طوری که برای هر رنگ‌آمیزی 2^n نقطه با همین n رنگ پاره‌خطی وجود داشته باشد که با دو نقطهٔ انتهایی خود همرنگ باشد.

۲۵)* فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی باشد و $0 \leq k \leq 2^n$. ثابت کنید می‌توان k زیرمجموعه از S را سفید و بقیهٔ زیرمجموعه‌های S را سیاه کرد به‌طوری‌که اجتماع هر دو زیرمجموعهٔ همرنگ S با آن‌ها همرنگ باشد.

۲۶)* به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید میانگین هر چند جملهٔ متوالی (حداقل ۲ جمله) از دنبالهٔ زیر عددی غیر صحیح است.

$$2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots, 2n, 2n-1$$

۲۷) در یک کشور $2n+1$ شهر وجود دارد. بین هر دو شهر از این کشور یک جاده احداث شده است. ثابت کنید می‌توان تمام جاده‌های بین این شهرها را یک طرفه کرد به‌طوری‌که از هر شهر n جاده خارج و به هر شهر n جاده وارد شود.

۲۸) $2n$ نفر در یک جمع حضور دارند. ثابت کنید این افراد می‌توانند با یکدیگر دست دهند به‌طوری‌که هر دو نفر حداکثر یک بار با هم دست دهند و برای هر i، $1 \leq i \leq n$، دو نفر وجود داشته باشند که هر یک دقیقاً با i نفر دیگر دست داده باشند.

۲۹)* $2n$ نقطه در صفحه داده شده است. از بین پاره‌خط‌های بین دو به دوی این نقاط n^2+1 پاره‌خط به دلخواه رسم شده‌اند. ثابت کنید سه نقطه وجود دارند که هر سه پاره‌خط بین این نقاط رسم شده‌اند.

۳۰)* ثابت کنید زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $2n$ عضوی S را می‌توان به دسته‌های ۳ تایی افراز کرد به‌طوری‌که اگر A، B و C در یک دسته قرار داشته باشند، آنگاه $A = B\Delta C$ ($B\Delta C$ مجموعهٔ اعضایی است که فقط در یکی از B و C قرار دارند).

۳۱)* در هر خانه از یک جدول $(2^m - 1) \times (2^n - 1)$ یکی از اعداد ۱ و ۱− نوشته شده است به‌طوری‌که عدد واقع در هر خانه برابر حاصل‌ضرب اعداد واقع در خانه‌هایی است که با این خانه ضلع مشترک دارند. ثابت کنید همهٔ اعداد واقع در این جدول برابر ۱ هستند. (المپیاد ریاضی روسیه ـ ۱۹۹۸)

۳۲)* n دسته با شماره‌های ۱، ۲، ... و n در نظر بگیرید. هر زیرمجموعه از مجموعهٔ $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ را در یکی از این دسته‌ها قرار داده‌ایم. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ متمایز از X مانند A و B وجود دارند که در یک دسته قرار داشته باشند و شمارهٔ دستهٔ آن‌ها برابر بزرگترین عضو مجموعهٔ $A\Delta B$ باشد. (المپیاد ریاضی رومانی ـ ۱۹۹۳)

۳۳) بین هر دو شهر از یک کشور یا جادهٔ شوسه و یا راه‌آهن وجود دارد. ثابت کنید یک جهان‌گرد با شروع از یکی از شهرهای این کشور می‌تواند از هر شهر این کشور دقیقاً یک بار عبور کند و به شهر ابتدایی باز گردد به‌طوری‌که در طی مسیر حداکثر یک بار وسیلهٔ خود را عوض کند.

۳۴) فرض کنید p_n برابر nامین عدد اول باشد. ثابت کنید دنباله‌ای به طول $2^n - 1$ وجود دارد که هر جملهٔ آن برابر یکی از اعداد p_1، p_2، ... و p_n باشد و حاصل‌ضرب هر چند جملهٔ متوالی از آن مربع کامل نباشد.

۳۵) m مهره در m خانه از یک جدول قرار دارند به‌طوری‌که هر مهره با حداقل یک مهرهٔ دیگر در یک سطر یا یک ستون قرار دارد. به‌ازای هر عدد طبیعی k، $1 \le k \le \frac{m}{2}$، ثابت کنید می‌توان $2k$ تا از مهره‌ها را به رنگ قرمز درآورد به‌طوری‌که هر مهرهٔ قرمز با حداقل یک مهرهٔ قرمز دیگر در یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشد.

۳۶) در هر خانه از یک جدول $2^n \times 2^n$ عددی حقیقی نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم دو خانه از جدول را انتخاب کنیم و به جای دو عدد واقع در آن‌ها میانگین حسابی آن دو عدد را در هر دو خانه بنویسیم. ثابت کنید می‌توان این عمل را طوری تکرار کرد که در نهایت همه اعداد جدول با یکدیگر برابر شوند.

۳۷)* اعداد a_1، a_2، ... و a_{2^n} داده شده‌اند به‌طوری‌که برای هر k، $1 \le k \le 2^{n-1}$، $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{2k-1} = 0$ و برای هر k، $2^{n-1} < k \le 2^n$،

$$a_k + \cdots + a_{2^n} + a_1 + \cdots + a_{2k-2^n-1} = 0$$

ثابت کنید همهٔ a_i ها برابر صفرند.

۳۸) n کتاب در یک قفسه از کتابخانه وجود دارد. هر بار می‌توانیم جای دوتا از کتاب‌ها را عوض کنیم. ثابت کنید می‌توان این عمل را طوری تکرار کرد که هر یک از $n!$ ترتیب مختلف کتاب‌ها دقیقاً یک بار ظاهر شود.

۳۹)* n لامپ در یک ردیف قرار دارند. در ابتدا همهٔ لامپ‌ها خاموش‌اند. در هر مرحله می‌توانیم وضعیت یکی از لامپ‌ها را تغییر دهیم (از روشن به خاموش و از خاموش به روشن). ثابت کنید می‌توان این عمل را طوری تکرار کرد که هر یک از 2^n وضعیت مختلف لامپ‌ها دقیقاً یک بار ظاهر شوند و در ضمن در پایان همهٔ لامپ‌ها خاموش باشند.

۴۰) اعداد مثبت a_1، a_2، ...، a_m، b_1، b_2، ... و b_n چنان‌اند که

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

ثابت کنید در خانه‌های جدول $m \times n$ می‌توان عددهای نامنفی را قرار داد به‌طوری‌که حداقل در $(m-1)(n-1)$ خانه عدد صفر وجود داشته باشد و در ضمن مجموع اعداد

واقع در سطر i ام برابر a_i، $m \geq i \geq ۱$، و مجموع اعداد واقع در ستون j ام برابر b_j، $n \geq j \geq ۱$، باشد.

۸—۲ انواع دیگری از استقرای ریاضی

در بخش قبل استقرای ضعیف را معرفی کردیم. استقرای ضعیف در مورد حکم‌هایی که در آن‌ها بتوان درستی $P(k+۱)$ را مستقیماً از درستی $P(k)$ نتیجه گرفت استفاده می‌شود. ولی تمام حکم‌هایی که با آن‌ها برخورد می‌کنیم این ویژگی را ندارند، مثلاً حکم‌هایی وجود دارند که در آن‌ها درستی $P(k+۱)$ از درستی $P(۱)$، $P(۲)$، ... و $P(k)$ نتیجه می‌شود. برای اثبات این گونه حکم‌ها از انواع دیگری از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. معروفترین این انواع، استقرای قوی است.

قضیهٔ ۱.۲.۸ (استقرای قوی) فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد و

۱) $P(۱)$ درست باشد.

۲) اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $P(۱)$، $P(۲)$، ... و $P(k)$ درست باشند، آنگاه $P(k+۱)$ نیز درست باشد،

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، درست است.

درک درستی این قضیه نیز مانند استقرای ضعیف بسیار ساده است. از شرط (۱) درستی $P(۱)$ نتیجه می‌شود. از شرط (۲) و درستی $P(۱)$، درستی $P(۲)$ نتیجه می‌شود، مجدداً از شرط (۲) و درستی $P(۱)$ و $P(۲)$ درستی $P(۳)$ نتیجه می‌شود و به همین صورت نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است.

مسألهٔ ۲.۲.۸ ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند توان متمایز از ۲ نوشت.

راه‌حل. حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. اگر $k + ۱$ زوج باشد، آنگاه عددی طبیعی مانند t وجود دارد که $k + ۱ = ۲t$. چون $۱ \leq t \leq k$، پس از درستی حکم به‌ازای $n = t$ نتیجه می‌گیریم اعداد صحیح و نامنفی متمایزی مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_r وجود دارند که

$$t = ۲^{a_۱} + ۲^{a_۲} + \cdots + ۲^{a_r}$$

و در نتیجه

$$k + ۱ = ۲t = ۲^{a_۱+۱} + ۲^{a_۲+۱} + \cdots + ۲^{a_r+۱}$$

و اگر $k + ۱$ فرد باشد، آنگاه عددی طبیعی مانند t وجود دارد که $k + ۱ = ۲t + ۱$. چون $۱ \leq t \leq k$، پس از درستی حکم به‌ازای $n = t$ نتیجه می‌گیریم اعداد صحیح و نامنفی متمایزی مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_r وجود دارند که

$$t = ۲^{a_۱} + ۲^{a_۲} + \cdots + ۲^{a_r}$$

و در نتیجه

$$k + ۱ = ۲t + ۱ = ۲^{a_۱+۱} + ۲^{a_۲+۱} + \cdots + ۲^{a_r+۱} + ۲^۰$$

پس در هر صورت $k + ۱$ برابر مجموع چند توان متمایز از ۲ است و لذا حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است. پس حکم به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است.

مسألهٔ بعد به قضیهٔ بنیادی حساب مشهور است.

مسألهٔ ۳.۲.۸ ثابت کنید هر عدد طبیعی n، $n > ۱$، را می‌توان به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد.

راه‌حل. حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۲$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = ۲, ۳, \ldots, k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای

$n = k + ۱$ نیز درست است. اگر $k + ۱$ عددی اول باشد که هیچ والا عدد اول p، k، $p \leq k$، وجود دارد که مقسوم‌علیهی از $k + ۱$ است. در نتیجه عدد طبیعی t، k، $۲ \leq t \leq k$، وجود دارد که $k + ۱ = pt$. چون حکم به‌ازای $n = t$ درست است، پس t را می‌توان به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد و چون p عددی اول است و $k + ۱ = pt$، پس $k + ۱$ را نیز می‌توان به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد. در نتیجه حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است و لذا حکم به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n > ۱$، درست است.

قضیهٔ ۴.۲.۸ (استقرای با دو مقدمه) فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد و

۱) $P(۱)$ و $P(۲)$ درست باشند.

۲) اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند k، $P(k)$ و $P(k + ۱)$ درست باشند، آنگاه $P(k + ۲)$ نیز درست باشد،

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، درست است.

مسألهٔ ۵.۲.۸ فرض کنید $x + \frac{۱}{x}$ عددی صحیح باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $x^n + \frac{۱}{x^n}$ نیز عددی صحیح است.

راه‌حل. با توجه به رابطهٔ

$$(x + \frac{۱}{x})(x^k + \frac{۱}{x^k}) = (x^{k+۱} + \frac{۱}{x^{k+۱}}) + (x^{k-۱} + \frac{۱}{x^{k-۱}})$$

نتیجه می‌گیریم

$$x^{k+۱} + \frac{۱}{x^{k+۱}} = (x + \frac{۱}{x})(x^k + \frac{۱}{x^k}) - (x^{k-۱} + \frac{۱}{x^{k-۱}})$$

پس اگر حکم به‌ازای $n = k - ۱$ و $n = k$ درست باشد، آنگاه حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. لذا اگر حکم به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ درست باشد، آنگاه حکم به‌ازای هر عدد

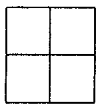
طبیعی n درست است. طبق فرض حکم به‌ازای $n = ۱$ درست است و به‌ازای $n = ۲$ می‌توان نوشت

$$x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} = (x + \frac{۱}{x})^{۲} - ۲$$

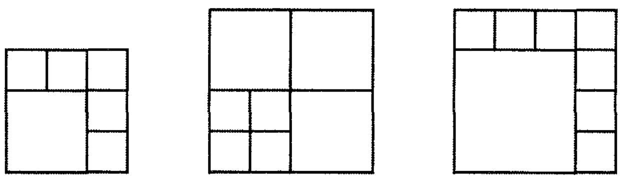
پس حکم به‌ازای $n = ۲$ نیز درست است. حال از قضیهٔ ۴.۲.۸ نتیجه می‌گیریم که حکم به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است.

مسألهٔ ۶.۲.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۶$، ثابت کنید یک مربع را می‌توان به n مربع کوچکتر تقسیم کرد.

راه‌حل. با توجه به این که یک مربع را می‌توان به ۴ مربع تقسیم کرد، نتیجه می‌گیریم که اگر یک مربع را بتوان به k مربعِ کوچکتر تقسیم کرد، آنگاه این مربع را می‌توان به $k + ۳$ مربع نیز تقسیم کرد. پس اگر حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، آنگاه حکم به‌ازای $n = k + ۳$ نیز درست است.



حال اگر حکم را به‌ازای $n = ۶$، $n = ۷$ و $n = ۸$ ثابت کنیم، نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای هر n، $n \geq ۶$، درست است. درستی حکم به‌ازای این سه مقدار در شکل زیر نشان داده شده است.



مسألهٔ ۷.۲.۸ دو دسته یکی شامل m و دیگری شامل n سنگریزه داده شده است، $m, n \geq ۰$. دو نفر به این صورت با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک دسته را انتخاب می‌کند و از آن به هر تعداد که بخواهد (حداقل یک) سنگریزه برمی‌دارد. این کار تا وقتی که هر دو دسته خالی شوند ادامه پیدا می‌کند. کسی که آخرین حرکت را انجام داده باشد برندهٔ بازی

است. اگر $m \neq n$، ثابت کنید کسی که اولین حرکت را انجام می‌دهد می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

راه‌حل. به استقرای قوی روی تعداد سنگریزه‌ها، $m + n$، ثابت می‌کنیم که اگر تعداد سنگریزه‌ها در دو دسته برابر نباشند، آنگاه شروع‌کنندهٔ بازی می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود. وقتی تعداد سنگریزه‌ها برابر ۱ باشد حکم درست است. فرض کنید حکم برای وقتی که تعداد سنگریزه‌ها برابر ۱، ۲، ... یا $k - ۱$ است درست باشد و اکنون دو دسته یکی شامل m و دیگری شامل n سنگریزه داده شده باشد به‌طوری‌که $m > n$ و $m + n = k$. نفر اول در اولین حرکت خود از دسته‌ای که m سنگریزه دارد، $m - n$ تا برمی‌دارد. در این صورت در هر دسته n سنگریزه باقی می‌ماند. اگر $n = ۰$، که بازی تمام شده است و نفر اول برندهٔ بازی است و اگر $n \neq ۰$، در این صورت نفر دوم باید از دسته‌ای حداقل یک سنگریزه بردارد. پس بعد از حرکت نفر دوم تعداد سنگریزه‌ها در دو دسته برابر نیست. فرض کنید در این وضعیت کلاً t سنگریزه باقی‌مانده باشد، در این صورت $۱ \leq t \leq k - ۱$. با توجه به درستی حکم برای وقتی که تعداد سنگریزه‌ها برابر t باشد، نتیجه می‌گیریم نفر اول می‌تواند طوری بازی را ادامه دهد که برندهٔ بازی شود. پس حکم برای وقتی که تعداد سنگریزه‌ها برابر k باشد درست است.

مسائل

۱) فرض کنید a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید اعداد صحیح x و y وجود دارند که $ax + by = ۱$.

۲) برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید اعداد صحیح k، $a_۰$، $a_۱$، ... و a_k وجود دارند به‌طوری‌که $k \geq ۰$، برای هر i، $۰ \leq i \leq k$، $۰ \leq a_i \leq ۲$ و

$$n = a_۰ + ۳a_۱ + ۳^۲a_۲ + \cdots + ۳^ka_k$$

۳)* برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید اعداد صحیح k، $a_۱$، ... و a_k وجود دارند به‌طوری‌که $k \geq ۱$، برای هر i، $۱ \leq i \leq k$، $۰ \leq a_i \leq i$ و

$$n = a_۱ \times ۱! + a_۲ \times ۲! + \cdots + a_k \times k!$$

۴)* فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $n > k$. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی کوچکتر از $\binom{n}{k}$ مانند m اعداد صحیح $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k وجود دارند به‌طوری‌که $۰ \leq a_۱ < a_۲ < \cdots < a_k < n$ و

$$m = \binom{a_۱}{۱} + \binom{a_۲}{۲} + \cdots + \binom{a_k}{k}$$

۵)* فرض کنید $F_۱ = ۱$، $F_۲ = ۲$ و برای $n \geq ۳$، $F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$. برای هر عدد طبیعی m ثابت کنید اندیس‌های متمایز $i_۱$، $i_۲$، ... و i_k وجود دارند به‌طوری‌که اختلاف هر دوتا از آن‌ها حداقل ۲ باشد و

$$m = F_{i_۱} + F_{i_۲} + \cdots + F_{i_k}$$

٦) به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ٦$، ثابت کنید یک مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان به n مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکتر تقسیم کرد.

۷) دو ماشین در اختیار داریم که یکی در ازای دریافت یک کارت، ۴ کارت و دیگری در ازای دریافت یک کارت، ٦ کارت به ما می‌دهد. در ابتدا یک کارت به ما داده شده است. به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۹$، ثابت کنید با استفاده از این دو ماشین می‌توان کاری کرد که پس از مدتی دقیقاً n کارت در اختیار داشته باشیم.

۸)* مهره‌ای در ابتدا روی نقطهٔ $(۱, ۱)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. اگر در مرحله‌ای مهره روی نقطهٔ (x, y) قرار داشته باشد می‌توانیم این مهره را برداشته و روی یکی از نقاط $(۲x, y)$، $(x, ۲y)$، $(|x-y|, y)$ و $(x, |x-y|)$ قرار دهیم و البته مهره را روی هیچ

یک از دو محور مختصات نمی‌توانیم قرار دهیم. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید می‌توان اعمال فوق را طوری انجام داد که مهره روی نقطهٔ (a,b) قرار گیرد.

۹)* یک ماشین در اختیار داریم. اگر به این ماشین دو کارت با کلمات $S_۱$ و $S_۲$ دهیم به ما کارتی با کلمهٔ $S_۱S_۲$ می‌دهد ($S_۱S_۲$ کلمه‌ای است که از قرار گرفتن کلمهٔ $S_۲$ در سمت راست کلمهٔ $S_۱$ به‌دست می‌آید) و اگر به ماشین کارتی با کلمهٔ S دهیم به ما کارتی با کلمهٔ aSb و کارتی با کلمهٔ bSa می‌دهد. در ابتدا تعداد زیادی کارت خالی در اختیار داریم. فرض کنید S کلمه‌ای با حروف a و b باشد که تعداد حروف a و b در آن برابرند. ثابت کنید با استفاده از ماشین فوق می‌توان کارتی با کلمهٔ S تولید کرد.

۱۰)* به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید جایگشتی از اعداد مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر دو عدد از این مجموعه مانند a و b میانگین این دو عدد (یعنی $\frac{a+b}{۲}$) در جایی بین این دو عدد نوشته نشده باشد. مثلاً به‌ازای $n = ۱۰$ جایگشت زیر ویژگی مورد نظر را دارد.

$$۹, ۱, ۵, ۳, ۷, ۱۰, ۲, ۶, ۴, ۸$$

۱۱)* در یک کلاس n نفره هر پسر با حداقل یک دختر دوست است. ثابت کنید گروهی از افراد این کلاس شامل حداقل $\frac{n}{۲}$ نفر می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که هر پسر از این گروه با تعداد فردی از دخترهای گروه دوست باشد. (المپیاد ریاضی روسیه ـ ۱۹۹۹)

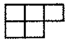
۱۲)* ثابت کنید به‌ازای بی‌نهایت عدد طبیعی n می‌توان اعضای مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۳n\}$ را به n دستهٔ سه‌تایی افراز کرد به طوری که در هر دسته یک عدد برابر مجموع دو عدد دیگر باشد.

۱۳) فرض کنید $a_۱ = ۳$، $a_۲ = ۷$ و به‌ازای $n \geq ۳$، $a_n = ۳a_{n-۱} - ۲a_{n-۲}$. به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $a_n = ۲^{n+۱} - ۱$.

۱۴)* دنبالهٔ $\cdots > a_۳ > a_۲ > a_۱ > ۱$ از عددهای طبیعی چنان است که برای هر عدد طبیعی n،

$$a_{n+a_n} = ۲a_n$$

ثابت کنید عدد طبیعی c وجود دارد به‌طوری‌که برای هر n، $a_n = n + c$. (المپیاد ریاضی لنین‌گراد ـ ۱۹۸۱)

۱۵)* ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی $۲n \times ۵$ را حداقل به $۲ \times ۳^{n-۱}$ طریق می‌توان با موزاییک‌های  فرش کرد.

۱۶) n سنگریزه روی یک میز قرار دارند. دو نفر با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک یا دو سنگریزه از روی میز برمی‌دارد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی کند بازندهٔ بازی است. ثابت کنید اگر n مضرب ۳ نباشد نفر اول و اگر n مضرب ۳ باشد نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برندهٔ بازی باشد.

۱۷)* مهره‌ای در ابتدا روی نقطهٔ $(۰, ۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. اگر در مرحله‌ای مهره روی نقطهٔ (x, y) قرار داشته باشد می‌توانیم این مهره را برداشته و روی یکی از نقاط $(۲x, ۲y)$، $(۲x, ۲y + ۱)$، $(۲x + ۱, y)$ و $(۲x + ۱, ۲y + ۱)$ قرار دهیم. فرض کنید a و b دو عدد صحیح و نامنفی باشند. ثابت کنید می‌توان اعمال فوق را طوری انجام داد که مهره روی نقطهٔ (a, b) قرار گیرد.

۱۸)* فرض کنید A و B دو کلمه باشند به‌طوری‌که $AB = BA$ (AB کلمه‌ای است که از قرار دادن کلمهٔ B در سمت راست کلمهٔ A به‌دست می‌آید). ثابت کنید کلمهٔ C وجود دارد که هر یک از A و B از قرار دادن چند کلمهٔ C در کنار یکدیگر به‌دست می‌آیند.

۱۹)* دو دسته سنگریزه یکی شامل m و دیگری شامل n سنگریزه داده شده است. دو نفر به نوبت با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود از یکی از دو دسته تعدادی سنگریزه

برمی‌دارد به شرطی که این تعداد مقسوم‌علیهی از تعداد سنگریزه‌های دستهٔ دیگر باشد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازندهٔ بازی است. اگر یکی از دو عدد m و n زوج و دیگری فرد باشد، ثابت کنید نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

۲۰)* یک عدد طبیعی را ویژه نامیم هرگاه بتوان آن را به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت که مجموع معکوس‌های آن‌ها برابر ۱ باشد. مثلاً هر یک از اعداد ۱۰ و ۱۷ ویژه هستند.

$$۱۰ = ۴ + ۴ + ۲, \quad \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$۱۷ = ۳ + ۴ + ۴ + ۶, \quad \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = ۱$$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد ویژهٔ زوج و بی‌نهایت عدد ویژهٔ فرد وجود دارد.

۲۱)* تمام n هایی را بیابید که به‌ازای آن‌ها بتوان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به ۴ زیرمجموعه افراز کرد طوری که مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها با دیگری برابر باشد.

فصل ۹

پاسخ، راهنمایی و راه‌حل

فصل ۱

بخش ۱–۱

۱) ۸ × ٦

۲) ۹ × ۱۰

۳) ۳ × ۵ × ۲

۴) برای رقم یکان، هزارگان، صدگان و دهگان به ترتیب ۵، ۸، ۸ و ۷ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر ۷ × ۸ × ۸ × ۵ است.

۵) الف) $٦^{۴}$

ب) ۳ × ۴ × ۵ × ٦

٦) الف) ۵ × ۲٦ × ۲٦ × ۵

ب) ۵ × ۲۱ × ۲۱ × ۵

۷) ۱۰ × ۱۰ × ۹

۸) الف) ۷×٦^۹

ب) $۷ \times ٦ \times ۵^۸$

۹) الف) ٦۴×۱۴

ب) $٦۴ \times ۴۹ \times ۳٦$

۱۰) $۳ \times ۵ \times ۴ \times ۳$

۱۱) الف) $۳ \times ۴ \times ۵$

ب) $(۳ \times ۴ \times ۵)^۲$

ج) $۳ \times ۴ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲$

۱۲) $٦ \times ۵ \times ۲$

۱۳) الف) باید ببینیم در چند عدد چهاررقمی که با رقم صفر نیز می‌توانند شروع شوند دقیقاً یک رقم ۵ وجود دارد. برای رقم ۵، ۴ انتخاب و برای هر یک از سه رقم باقی‌مانده ۹ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر $۹^۳ \times ۴$ است.

ب) مشابه استدلال قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $۸ \times ۸ \times ۳ \times ۴$ است.

۱۴) الف) هر یک از ۷ نفر ۱۰ انتخاب دارند، لذا پاسخ برابر $۱۰^۷$ است.

ب) $۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ٦ \times ۵ \times ۴$

۱۵) الف) $۴^{۱۰}$

ب) $۵^{۱۰}$

۱٦) $۲ \times ۳ \times ۳ \times ۲$

۱۷) دو مهرهٔ اسب باید در دو گوشهٔ مقابل از یک مستطیل ۳×۲ قرار گیرند. تعداد مستطیل‌های ۳×۲ برابر $۲ \times ٦ \times ۷$ است و برای هر مستطیل ۳×۲ به ۸

طریق می‌توان دو مهره را در دو گوشهٔ مقابل این مستطیل قرارداد. پس پاسخ برابر $۸ \times ۲ \times ٦ \times ۷$ است.

۱۸) ۷ دایره در یک سطر در نظر بگیرید. برای رقم‌های ۵، ۴، ۳ و ۲ به ترتیب ۷، ٦، ۵ و ۴ انتخاب وجود دارد و سه دایرهٔ باقی‌مانده به صورت منحصربفرد با رقم ۱ پر می‌شوند. لذا پاسخ برابر $۴ \times ۵ \times ٦ \times ۷$ است.

۱۹) یکی از افراد را در نظر بگیرید. این فرد به ۹ طریق می‌تواند هم تیمی خود را انتخاب کند، مجدداً یک فرد دیگر در نظر بگیرید. این فرد به ۷ طریق می‌تواند هم تیمی خود انتخاب کند و .... پس پاسخ برابر است با $۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۹$.

۲۰) الف) برای تاس سفید ٦ و برای تاس سیاه ۳ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر ۳×٦ است.

ب) برای تاس سفید ٦ و برای تاس سیاه ۲ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر ۲×٦ است.

۲۱) $۲^{۷}$

۲۲) $۲^{۵}$

۲۳) به ۵ طریق می‌توان دو عدد انتخاب کرد که اختلاف آن‌ها برابر ۵ باشد و به $۲^{۴}$ طریق می‌توان تعدادی عدد بین این دو عدد انتخاب کرد. لذا پاسخ برابر $۲^{۴} \times ۵$ است.

۲۴) برای هر یک از سکوهای ۲، ۳، ... و ۲۹ دو انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر $۲^{۲۸}$ است.

۲۵) الف) تجزیهٔ استاندارد عدد داده شده به صورت $۵^{۱۲} \times ۳^{۸} \times ۲^{۴۰}$ است. لذا این عدد $۱۳ \times ۹ \times ۴۱$ مقسوم‌علیه مثبت دارد.

ب) چون $۳۰۰۰ = ۲^{۳} \times ۳ \times ۵^{۳}$، لذا مقسوم‌علیه‌های مورد نظر به صورت $۲^{a} \times ۳^{b} \times ۵^{c}$

هستند که $۳ \leq a \leq ۴۰$، $۱ \leq b \leq ۸$ و $۳ \leq c \leq ۱۲$. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر $۳۸ \times ۸ \times ۱۰$ است.

۲۶) هر مقسوم‌علیه مشترک از دو عدد داده شده به صورت $۲^a \times ۳^b \times ۷^c$ است که $۰ \leq a \leq ۵$، $۰ \leq b \leq ۱۲$ و $۰ \leq c \leq ۶$. پس تعداد آن‌ها برابر $۶ \times ۱۳ \times ۷$ است.

۲۷) برای سکه‌های ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی به ترتیب ۱۱، ۹ و ۱۸ انتخاب وجود دارد (مثلاً در مورد سکه‌های ۵ تومانی می‌توان ۰، ۱، ۲، ... یا ۱۰ تا را در قلک انداخت). پس پاسخ برابر $۱۱ \times ۹ \times ۱۸$ است.

۲۸) عدد سمت راست یا از همهٔ اعداد بزرگتر یا از همه کوچکتر است، پس برای آن ۲ انتخاب وجود دارد. به طور مشابه نهمین عدد باید از همهٔ اعداد باقی‌مانده بزرگتر یا از همه کوچکتر باشد، پس برای آن نیز ۲ انتخاب وجود دارد. چنان چه این روند را تکرار کنیم نتیجه می‌گیریم برای هشتمین، هفتمین، ... و دومین عدد ۲ انتخاب و برای اولین عدد یک انتخاب وجود دارد. لذا پاسخ برابر $۲^۹$ است.

۲۹) به $۲^۵$ طریق می‌توان تعدادی از سکه‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ ریالی را در قلک انداخت. مابقی سکه‌های قلک به صورت منحصربفرد مشخص می‌شوند. لذا پاسخ برابر $۲^۵$ است.

۳۰) برای اعداد ۱، ۲ و ۷ یک انتخاب، برای اعداد ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹، دو انتخاب و برای عدد ۱۰ یک انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر $۲^۶$ است.

۳۱) ۵×۲^۳

۳۲) $۲^۴ \times ۲^۴$

بخش ۱—۲

۱) $۶ + ۸$

۲) $۵ \times ۷ + ۵ \times ٦ + ۷ \times ٦$

۳) در $۹^۴$ عدد فقط رقم سمت چپ و در $۹^۳ \times ۸ \times ۴$ عدد فقط یکی از چهار رقم سمت راست برابر ۳ است. پس پاسخ برابر $۹^۳ \times ۸ \times ۴ + ۹^۴$ است.

۴) بسته به این که مهرهٔ سفید در یکی از گوشه‌ها، در یکی از خانه‌های حاشیهٔ صفحهٔ شطرنجی غیر از گوشه‌ها یا در یکی از خانه‌های غیر حاشیه‌ای قرار گیرد برای مهرهٔ سیاه به ترتیب ۳، ۵ و ۸ انتخاب وجود دارد. از این که ۴ گوشه، ۲۴ خانهٔ حاشیه‌ای غیر از گوشه‌ها و ٣٦ خانهٔ غیر حاشیه‌ای وجود دارد نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$۴ \times ۳ + ۲۴ \times ۵ + ۳٦ \times ۸$$

۵) الف) $۳ \times ۴ + ۲ \times ۳$

ب) $(۳ \times ۴ + ۲ \times ۳)^۲$

ج) $۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ + ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ + ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

٦) $۴^۳ + ۴^۴ + ۴^۵$

۷) بسته به این که ۵ رقم متوالی ۳ از رقم اول، دوم یا سوم شروع شود نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $۹ \times ۸ \times ۱۰ + ۸ \times ۱۰ \times ۱۰ + ۱۰ \times ۱۰$ است.

۸) به‌ازای هر x، $-۱۰۰ \leq x \leq ۱۰۰$، تعداد y هایی که در نامعادله صدق می‌کنند برابر $۲۰۱ - ۲|x|$ است. لذا پاسخ برابر است با

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲۰۱ + ۱۹۹ + ۱۹۷ + \cdots + ۳ + ۱ = ۲۰۲۰۱$$

۹) خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به چهار لایه تقسیم می‌کنیم. لایهٔ اول شامل خانه‌های حاشیه‌ای صفحهٔ شطرنجی است که تعداد آن‌ها برابر $۸^۲ - ٦^۲ = ۲۸$ است. لایهٔ دوم شامل خانه‌های حاشیه‌ای صفحهٔ شطرنجی ٦×٦ است که از حذف خانه‌های لایهٔ اول

به‌دست می‌آید. تعداد خانه‌های لایهٔ دوم برابر $۲۰ = ۴^۲ - ٦^۲$ است. به طور مشابه لایهٔ سوم و چهارم را تعریف می‌کنیم. تعداد خانه‌های این دو لایه نیز به ترتیب برابر ۱۲ و ۴ است. اگر وزیر سفید به ترتیب در یکی از خانه‌های لایهٔ اول، دوم، سوم و چهارم قرار گیرد برای وزیر سیاه به ترتیب ۲۱، ۲۳، ۲۵ و ۲۷ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$۲۸ \times ۲۱ + ۲۰ \times ۲۳ + ۱۲ \times ۲۵ + ۴ \times ۲۷$$

۱۰) تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام متمایز که رقم هزارگان آن‌ها ۷، ۸ یا ۹ است برابر $۷ \times ۸ \times ۹ \times ۳$ است، تعداد اعدادی که رقم هزارگان آن‌ها ٦ و رقم صدگان آن‌ها از ۳ بزرگتر است برابر $۷ \times ۸ \times ۵ \times ۱$ و تعداد اعدادی که رقم هزارگان و صدگان آن‌ها به ترتیب ٦ و ۳ و رقم دهگان آن‌ها بزرگتر یا مساوی با ۲ است برابر $۷ \times ٦ \times ۱ \times ۱$ است. با توجه به این که خود عدد ٦۳۲۰ را نیز در این شمارش محاسبه کرده‌ایم، لذا پاسخ برابر است با

$$۳ \times ۹ \times ۸ \times ۷ + ۱ \times ۵ \times ۸ \times ۷ + ۱ \times ۱ \times ٦ \times ۷ - ۱$$

۱۱) از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰، در $۱۰^۴$ عدد رقم یکان برابر ۵ است، در $۱۰^۴$ عدد رقم دهگان برابر ۵ است و .... پس جمعاً $۱۰^۴ \times ۵$ بار رقم ۵ نوشته می‌شود.

۱۲) در ۹۰ عدد چهاررقمی دو رقم سمت راست، در ۹۰ عدد دو رقم وسط و در ۱۰۰ عدد دو رقم سمت چپ برابر ۲۵ است. همچنین در ۱۰۰ عدد رقم یکان برابر ۲ و رقم هزارگان برابر ۵ است که در این جا عبارت ۲۵ از قراردادن عدد بعدی در سمت راست این عدد به‌دست می‌آید. لذا پاسخ مسأله برابر $۱۰۰ + ۱۰۰ + ۹۰ + ۹۰$ است.

۱۳) الف) ۱۲۵

ب) ۲۴

۱۴) ۵۰۰

۱۵) ۲۴۰

۱۶) فرض کنید مجموع اعداد گفته شده برابر S باشد. در یک ردیف این اعداد را از کوچک به بزرگ و در ردیف بعدی اعداد را از بزرگ به کوچک می‌نویسیم. به سادگی می‌توان دید مجموع هر دو عدد که زیر هم قرار می‌گیرند برابر ۷۷۷۷ است.

$$\begin{array}{rcccccccccc} S & = & ۱۱۱۱ & + & ۱۱۱۲ & + & ۱۱۱۳ & + & \cdots & + & ۶۶۶۶ \\ S & = & ۶۶۶۶ & + & ۶۶۶۵ & + & ۶۶۶۴ & + & \cdots & + & ۱۱۱۱ \\ \hline ۲S & = & ۷۷۷۷ & + & ۷۷۷۷ & + & ۷۷۷۷ & + & \cdots & + & ۷۷۷۷ \end{array}$$

چون تعداد اعداد برابر $۶^۴$ است، لذا $S = \frac{۶^۴ \times ۷۷۷۷}{۲}$.

۱۷) با توجه به رابطهٔ

$$\overline{abcd} = ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d$$

ببینیم هر رقم در هر یک از مرتبه‌های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان چند بار ظاهر می‌شود. هر یک از رقم‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ در رقم یکان $۵ \times ۶ \times ۷$ عدد ظاهر می‌شوند. همچنین هر یک از رقم‌های ۱، ۳، ۵ و ۷ در رقم دهگان (و همچنین صدگان و هزارگان) $۵ \times ۶ \times ۴$ عدد و هر یک از رقم‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ در رقم دهگان (و همچنین صدگان و هزارگان) $۵ \times ۶ \times ۳$ عدد ظاهر می‌شوند، پس مجموع اعداد داده شده برابر است با

$$\begin{aligned} (۱۰۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰) \quad \times \quad & [۴ \times ۶ \times ۵(۱ + ۳ + ۵ + ۷) \\ & + \quad ۳ \times ۶ \times ۵(۲ + ۴ + ۶ + ۸)] \\ & + \quad ۷ \times ۶ \times ۵(۲ + ۴ + ۶ + ۸) \end{aligned}$$

۱۸) باید سه عدد به صورت a، $a+d$ و $a+۲d$ انتخاب کنیم (به چنین تصاعدی، تصاعد حسابی با قدرنسبت d گفته می‌شود). به‌ازای هر d، $۱ \le d \le ۹$، تعداد

تصاعدهای حسابی با قدرنسبت d برابر تعداد اعداد a است که در نابرابری‌های $a \geq ۱$ و $a + ۲d \leq ۲۰$ صدق می‌کنند، پس تعداد این تصاعدها برابر $۲۰ - ۲d$ است. لذا پاسخ برابر است با

$$۱۸ + ۱۶ + ۱۴ + \cdots + ۲ = ۹۰$$

۱۹) عدد ۱۰ در $۲^۹$ زیرمجموعه، عدد ۹ در $۲^۸$ زیرمجموعه، عدد ۸ در $۲^۷$ زیرمجموعه، ... و عدد ۱ در $۲^۰$ زیرمجموعه بزرگترین عضو است. پس پاسخ برابر است با

$$۲^۹ \times ۱۰ + ۲^۸ \times ۹ + ۲^۷ \times ۸ + \cdots + ۲^۰ \times ۱$$

۲۰) الف) برای ارقام a و c به ترتیب ۹ و ۱۰ انتخاب وجود دارد. یکی از دو رقم b و d باید زوج و دیگری باید فرد باشد، لذا برای این دو رقم نیز ۵×۱۰ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر $۵ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۹$ است.

ب) تعداد اعدادی که در آن‌ها d یا b برابر صفر باشد برابر

$$۵ \times ۸ \times ۷ \times ۲$$

و تعداد اعدادی که در آن‌ها هر دو رقم d و b ناصفر باشند برابر

$$۴ \times ۵ \times ۷ \times ۷ \times ۲$$

است. لذا پاسخ برابر مجموع این دو عدد می‌باشد.

۲۱) تعداد حالاتی که اعداد ۱، ۲ و ۳ در یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشند برابر

$$۶ \times ۲ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

و تعداد حالاتی که یکی از ۲ و ۳ با عدد ۱ هم سطر و دیگری هم ستون باشد برابر

$$۱۶ \times ۲ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

است. لذا پاسخ برابر مجموع این دو عدد می‌باشد.

۲۲) در $۷ \times ۸ \times ۹$ عدد رقم یکان برابر صفر و در $۷ \times ۸ \times ۸$ عدد رقم یکان برابر ۵ است. پس پاسخ برابر مجموع این دو عدد می‌باشد.

۲۳) در $٦ \times ۷ \times ۸ \times ۵ \times ۲$ عدد رقم یکان برابر ۱ یا ۳ و در $٦ \times ۷ \times ۸ \times ۴ \times ۳$ عدد رقم یکان برابر ۵، ۷ یا ۹ است. پس پاسخ برابر مجموع این دو عدد می‌باشد.

۲۴) تعداد کلماتی که حرف اول آن‌ها a، b یا c است برابر $۸^۴ \times ۳$، تعداد کلماتی که حرف اول آن‌ها d و حرف دوم آن‌ها a، b، c یا d است برابر $۸^۳ \times ۴$، تعداد کلماتی که حرف اول آن‌ها d، حرف دوم آن‌ها e و حرف سوم آن‌ها a، b، c، d یا e است برابر $۸^۲ \times ۵$، تعداد کلماتی که سه حرف اول آن‌ها به ترتیب d، e و f است و حرف چهارم آن‌ها a، b، c، d، e یا f است برابر ۸×٦ و تعداد کلماتی که چهار حرف اول آن‌ها به ترتیب d، e، f و g است برابر ۸ است. پس $defgh$

$$۳ \times ۸^۴ + ۴ \times ۸^۳ + ۵ \times ۸^۲ + ٦ \times ۸ + ۸$$

امین کلمه در لیست است.

بخش ۱—۳

۱) $۷^۴ - ٦^۴$

۲) $۹ \times ۱۰^۴ - ۷ \times ۸^۴$

۳) $۹ \times ۱۰^۵ - ۴ \times ۵^۵$

۴) $۹ \times ۱۰^۵ - ۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ٦ \times ۵$

۵) $۲^{۱۰} - ۱۱$

٦) $۲^{۱۰} - ۲^۵$

۷) $۲^{۱۰} - ۲^{۵}$

۸) $۹ \times ۱۰^{۳} - ٦^{۴}$

۹) اگر $۱۰۰۰ \leq ٦k \leq ۹۹۹۹$، آنگاه $۱٦۷ \leq k \leq ۱٦٦٦$ و لذا ۱۵۰۰ عدد چهاررقمی بر ٦ بخش‌پذیرند. پس $۹ \times ۱۰^{۳} - ۱۵۰۰$ عدد بر ٦ بخش‌پذیر نیستند.

۱۰) اگر $۱۰۰۰ \leq k^{۲} \leq ۹۹۹۹$، آنگاه $۳۲ \leq k \leq ۹۹$ و لذا ٦۸ عدد چهاررقمی مربع کامل هستند، پس $۹ \times ۱۰^{۳} - ٦۸$ عدد مربع کامل نیستند.

۱۱) ۲۹۰

۱۲) الف) $۲٦^{۵} - ۲۱^{۳} \times ۲٦^{۲}$

ب) $۲٦ \times ۲۵ \times ۲۴ \times ۲۳ \times ۲۲ - ۲۱ \times ۲۰ \times ۱۹ \times ۲۳ \times ۲۲$

۱۳) اگر $۱۰۰۰ \leq ۷k + ۳ \leq ۹۹۹۹$، آنگاه $۱۴۳ \leq k \leq ۱۴۲۸$ و لذا پاسخ برابر ۱۲۸٦ است.

۱۴) تعداد اعداد ۵ رقمی با ارقام ۴، ۵، ٦، ۷، ۸ و ۹ برابر $٦^{۵}$ است که از این تعداد در $۵^{۵}$ عدد رقم ۴ وجود ندارد. پس پاسخ برابر $٦^{۵} - ۵^{۵}$ است.

۱۵) تعداد اعداد ٦ رقمی برابر ۹×۱۰^{۵} است و تعداد اعدادی که در آن‌ها رقم یکان با هیچ یک از رقم‌های دهگان و صدگان برابر نیست برابر $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۹ \times ۹ \times ۱۰$ است، لذا پاسخ برابر $۹ \times ۱۰^{۵} - ۹^{۳} \times ۱۰^{۳}$ است.

۱٦) در مجموعهٔ $\{۱, \ldots, ٦۰۰\}$، ۳۰۰ عدد بر ۲ بخش‌پذیرند که از این تعداد ۱۰۰ عدد بر ۳ نیز بخش‌پذیر می‌باشند. پس پاسخ برابر ۱۰۰ − ۳۰۰ است.

۱۷) الف) فرض کنید $a = ۲^{a_۱} \times ۳^{a_۲} \times ۵^{a_۳}$ و $b = ۲^{b_۱} \times ۳^{b_۲} \times ۵^{b_۳}$. در این صورت هر یک از $a_۱$ و $b_۱$ برابر یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... و ۱۰ هستند و در ضمن یکی از آن‌ها

باید برابر ۱۰ باشد. پس برای a_1 و b_1، $11^2 - 10^2$ انتخاب وجود دارد. به طور مشابه برای a_2 و b_2، $9^2 - 8^2$ و برای a_3 و b_3، $7^2 - 6^2$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$(11^2 - 10^2)(9^2 - 8^2)(7^2 - 6^2)$$

ب) مشابه استدلال قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$(11^3 - 10^3)(13^3 - 12^3)(8^3 - 7^3)(5^3 - 4^3)$$

۱۸) عدد $5^7 \times 3^8 \times 2^{10}$، $11 \times 9 \times 8$ مقسوم‌علیه مثبت دارد. چون $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$، لذا هر مقسوم‌علیه از $5^7 \times 3^8 \times 2^{10}$ که بر ۳۰۰ بخش‌پذیر باشد به صورت $2^a \times 3^b \times 5^c$ است که $2 \le a \le 10$، $1 \le b \le 8$ و $2 \le c \le 7$. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر $6 \times 8 \times 9$ است، لذا پاسخ برابر است با

$$11 \times 9 \times 8 - 9 \times 8 \times 6$$

۱۹) $11 \times 13 \times 10 - 9 \times 13 \times 8$

فصل ۲

بخش ۲—۱

۳) الف) $\frac{25!}{10!}$

ب) $3^{30} \times 30!$

ج) $\frac{100!}{2^{50} \times 50!}$

د) $2^{21} \times \frac{20!}{9!}$

ه) $\frac{60! \times 10!}{2^{20} \times 20! \times 30!}$

۵) $2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$

بخش ۲–۲

۱) الف) !۸

ب) !۷

ج) $۳ \times !۷$

د) $۵ \times ۳ \times !٦$

ه) $۴ \times ۲ \times !٦$

و) !٦

ز) !٦

۲) $!۵ \times !۵$

۳) !۷

۴) الف) !۱۱

ب) $!٦ \times !٦$

ج) $!۵ \times !٦$

د) $!۲ \times !٦ \times !۵$

۵) $۲ \times !۳ \times !۳$

٦) $!٦ \times !۳$

۷) $۳ \times !۲ \times !۳$

۸) $!۳ \times !۲ \times !۴$

۹) $۳ \times !۵$

۱۰) ابتدا همهٔ حروف غیر از r و a را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !۶ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس حرف a را سمت چپ یکی از حروف e و i و حرف r را سمت چپ یکی از a و حرف صداداری که در سمت راست a نیست قرار می‌دهیم. این کار را نیز به ۲×۲ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ مسأله برابر $۶! \times ۲ \times ۲$ است.

۱۱) $۶! \times ۳! - ۵! \times ۳! \times ۲!$

۱۲) $۶! \times ۳! - ۵! \times ۴$

۱۳) دو حالت در نظر می‌گیریم. حالت اول این که ۴ حرف صدادار با حروف n و s مجاور باشند و حالت دوم این که ۳ حرف صدادار با این دو حرف مجاور باشند. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$۴! \times ۵! + ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۵!$$

۱۴) ابتدا نشان دهید عدد سمت راست جایگشت باید برابر ۱ یا ۱۰ باشد. پس برای این عدد ۲ انتخاب وجود دارد. سپس نشان دهید نهمین عدد جایگشت برابر بزرگترین یا کوچکترین عدد باقی‌مانده است، پس برای این عدد نیز ۲ انتخاب وجود دارد. همین کار را ادامه دهید و نتیجه بگیرید تعداد جایگشت‌ها برابر $۲^۹$ است.

۱۵) $۷! - ۵!$

۱۶) $۲ \times ۸! - ۲ \times ۷!$

۱۷) $۴ \times ۳! \times ۵!$

۱۸) تعداد جایگشت‌هایی که a بین r و t قرار می‌گیرد برابر $۶! \times ۱۰$ و تعداد جایگشت‌هایی که a بین r و t قرار نمی‌گیرد برابر $۶! \times ۸$ است. لذا پاسخ برابر $۶! \times ۱۸$ است.

۱۹) تعداد جایگشت‌هایی که بین u و i و همچنین بین e و a یک حرف بی‌صدا قرار می‌گیرد برابر $۵ \times ۲ \times ۲ \times ۴ \times ۵!$ و تعداد جایگشت‌هایی که بین u و i یکی از e و a و بین e و a یکی از u و i قرار می‌گیرد برابر $۸ \times ۶!$ است. لذا پاسخ برابر $۴۰ \times ۵! + ۸ \times ۶!$ است.

بخش ۲—۳

۱) الف) $P(۹, ۶)$

ب) $P(۸, ۵)$

ج) $۶P(۸, ۵)$

د) $۶P(۸, ۵)$

هـ) $۶ \times ۵ \times P(۷, ۴)$

و) $P(۹, ۶) - ۶!$

ز) $P(۶, ۳)P(۶, ۳)$

۲) الف) $P(۱۵, ۱۰)$

ب) $P(۱۵, ۱۰)$

۳) $P(۸, ۵)P(۸, ۴)P(۷, ۳)$

۴) $P(۱۴, ۱۱)$

۵) $P(۱۵, ۹)$

۶) $۵!P(۶, ۳)$

۷) $۷! - ۴!P(۵, ۳)$

۸) $۳! \times ۶!P(۷, ۲)$

۹) $P(۸, ۵)$

۱۰) $P(8,6)$

۱۱) ابتدا حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار می‌دهیم به‌طوری‌که حرف g قبل از حرف r قرار گیرد. این کار را به $P(6,4)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس حروف صدادار را در فضاهای خالی بین حروف بی‌صدا قرار می‌دهیم. این کار را نیز به $P(7,3)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ برابر $P(6,4)P(7,3)$ است.

۱۲) دو حالت در نظر می‌گیریم. حالت اول این که حروف m و o بین حروف p و r قرار گیرند. در این حالت تعداد جایگشت‌ها برابر $4! \times 32$ است (تعداد راه‌های تشکیل یک بستهٔ ۵ حرفی که دو سر آن حروف p و r باشند و m و o نیز بین این دو حرف در کنار یکدیگر باشند برابر ۳۲ است). حالت دوم این که حروف m و o بین p و r قرار نداشته باشد. در این حالت تعداد جایگشت‌ها برابر $P(4,3) \times 2 \times 3! \times 2$ است (تعداد راه‌های تشکیل بستهٔ ۵ حرفی که دو سر آن حروف p و r باشند برابر $2P(4,3)$ است). پس پاسخ برابر است با

$$32 \times 4! + 24P(4,3)$$

۱۳) $4P(6,3)$

۱۴) ابتدا ۴ رقم متمایز غیر از ۰، ۱ و ۲ در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $P(7,4)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. رقم صفر را در یکی از ۴ مکان بین این ۴ رقم غیر از ابتدای عدد قرار می‌دهیم و سپس ارقام ۱ و ۲ را در دو مکان از ۴ مکان باقی‌مانده قرار می‌دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$P(7,4) \times 4 \times P(4,2)$$

۱۵) برای a_4، a_5، ... و a_9، $P(9,6)$ انتخاب وجود دارد و پس از آن a_1، a_2 و a_3 به طور یکتا تعیین می‌شوند.

۱۶) تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمهٔ triangle که در آن‌ها هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند برابر $۵!P(۶,۳)$ است که از این تعداد در $P(۵,۳) \times ۲ \times ۴!$ جایگشت حروف r و g مجاورند. پس پاسخ برابر است با

$$۵!P(۶,۳) - ۴! \times ۲ \times P(۵,۳)$$

۱۷) ابتدا فرض کنید بین p و t حرفی صدادار قرار گیرد. برای حرف صدادار بین p و t، ۳ انتخاب داریم و به ۲ طریق می‌توانیم جای p و t را عوض کنیم. حال بستهٔ این سه حرف را به همراه ۳ حرف بی‌صدای دیگر به !۴ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم و دو حرف صدادار دیگر را به $P(۵,۲)$ طریق می‌توانیم در فضاهای خالی بین این حروف قرار دهیم. پس تعداد این جایگشت‌ها برابر $P(۵,۲) \times ۴! \times ۲ \times ۳$ است. حال فرض کنید بین p و t حرفی بی‌صدا قرار گیرد. برای این حرف بی‌صدا ۳ انتخاب داریم و به ۲ طریق می‌توانیم جای p و t را عوض کنیم. حال بستهٔ این سه حرف را به همراه ۲ حرف بی‌صدای دیگر به !۳ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم و سه حرف صدادار را به $P(۴,۳)$ طریق می‌توانیم در فضاهای خالی بین این حروف قرار دهیم. پس تعداد این جایگشت‌ها برابر $P(۴,۳) \times ۳! \times ۲ \times ۳$ است. لذا پاسخ برابر است با

$$۳ \times ۲ \times ۴! \times P(۵,۲) + ۳ \times ۲ \times ۳! \times P(۴,۳)$$

بخش ۲—۴

۱) الف) $۱۲!$

ب) $۹! \times ۴!$

ج) $۸!P(۹,۴)$

د) ابتدا ۴ معلم را دور میز می‌نشانیم. این کار را به !۳ طریق می‌توانیم انجام دهیم. چون در هر یک از ۴ فضای خالی بین معلمین حداقل دو دانش‌آموز باید بنشینند، لذا در یکی از این فضاها ۳ دانش‌آموز و در سه فضای دیگر ۲ دانش‌آموز باید بنشینند.

به ۴ طریق می‌توانیم فضای شامل ۳ دانش‌آموز را تعیین و سپس به !۹ طریق می‌توانیم دانش‌آموزان را بنشانیم، لذا پاسخ برابر $۹! \times ۴ \times ۳!$ است.

۲) الف) $\frac{۱}{۶}P(۹,۶)$

ب) $P(۸,۵)$

ج) جای حرف o را دور دایره ثابت می‌گیریم و ۵ جای خالی دیگر دور دایره در نظر می‌گیریم. به $P(۵,۲)$ طریق می‌توانیم حروف a و i را در دو جا از این ۵ جا قرار دهیم و به $P(۶,۳)$ طریق می‌توانیم سه حرف بی‌صدا از شش حرف بی‌صدا را در ۳ جای خالی دیگر قرار دهیم. پس پاسخ برابر $P(۵,۲)P(۶,۳)$ است.

د) $\frac{۱}{۶}(P(۹,۶) - P(۷,۶))$

۳) $۴! \times ۲^۵$

۴) الف) جای حرف n را دور دایره ثابت می‌گیریم و ۷ جای خالی دیگر دور دایره در نظر می‌گیریم. برای حرف r، ۲ انتخاب و برای بقیهٔ حروف !۶ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر $۲ \times ۶!$ است.

ب) !۶. توجه کنید که در این حالت برای حرف r یک انتخاب وجود دارد.

۵) ۲

۶) تعداد روش‌های برچسب‌گذاری از سمت چپ به ترتیب برابر $\frac{۶!}{۲}$، ۶، $\frac{۵!}{۲}$ و $\frac{۵!}{۲}$ است.

فصل ۳

بخش ۳–۱

۱) الف) $\binom{۱۰}{۲}$

ب) $\binom{۱۰}{۳}$

۲) $\binom{10}{7}$

۳) الف) $\binom{20}{8}$

ب) $\binom{17}{5}$

ج) $\binom{17}{8}$

د) $\binom{20}{8} - \binom{17}{8}$

ه) $\binom{20}{8} - \binom{17}{5}$

و) $\binom{20}{8} - \binom{15}{8}$

ز) $\binom{12}{6}$

ح) $10\binom{9}{6}$

ط) $\binom{10}{6}\binom{10}{2} + \binom{10}{7}\binom{10}{1} + \binom{10}{8}$

ی) $\binom{10}{3}\binom{10}{5} + \binom{10}{4}\binom{10}{4} + \binom{10}{5}\binom{10}{3}$

۴) $\binom{100}{25}\binom{75}{35}$

۵) $4!\binom{5}{3}$

۶) $\binom{9}{1}\binom{8}{5}2^5$

۷) الف) ابتدا ۱۴ نفر را از بین ۳۰ نفر انتخاب می‌کنیم. دو نفری که در بین این ۱۴ نفر از همه بلندترند باید در تیم والیبال قرار گیرند. پس ۴ نفر از ۱۲ نفر باقی‌مانده را باید برای تکمیل تیم والیبال انتخاب کنیم. لذا پاسخ برابر $\binom{12}{4}\binom{30}{14}$ است.

ب) ابتدا ۱۴ نفر را انتخاب می‌کنیم. دو نفری که از همه بلندترند باید در تیم والیبال و نفر سوم باید در تیم فوتبال قرار گیرد. لذا پاسخ برابر $\binom{11}{4}\binom{30}{14}$ است.

ج) ابتدا ۱۴ نفر را انتخاب می‌کنیم. چهار نفری که از همه کوتاهترند باید در تیم فوتبال قرار گیرند. پس پاسخ برابر $\binom{10}{6}\binom{30}{14}$ است.

د) ابتدا ۱۴ نفر را انتخاب می‌کنیم. باید ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم

به‌طوری‌که فردی که قد او بلافاصله بعد از کوتاهترین فرد انتخاب شده است جزو افراد انتخاب شده نباشد. این کار را به $\binom{۱۳}{۸}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم، پس پاسخ برابر $\binom{۱۳}{۸}\binom{۳۰}{۱۴}$ است.

ه) ابتدا ۱۴ نفر را انتخاب می‌کنیم. طبق قضیهٔ ۱۸.۱.۳ به $\binom{۱۴-۶+۱}{۶}$ طریق می‌توانیم ۶ نفر تیم والیبال را انتخاب کنیم. پس پاسخ برابر $\binom{۹}{۶}\binom{۳۰}{۱۴}$ است.

۸) $\binom{۹}{۲}^{۲}$

۹) $\binom{۱۰}{۶}\left(\binom{۱۰}{۶}-۱\right)\left(\binom{۱۰}{۶}-۲\right)\left(\binom{۱۰}{۶}-۳\right)$

۱۰) $\binom{۷}{۵}\binom{۱۰}{۵}۵!$

۱۱) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ که عدد ۵ را دارند برابر $\binom{n-۱}{۲}$ است. پس $\binom{n-۱}{۲}=\binom{n}{۳}\frac{۱}{۴}$ و لذا $n=۱۲$.

۱۲) الف) $\binom{۱۰}{۲}\times ۴^{۸}$

ب) $\binom{۱۰}{۲}\binom{۸}{۳}\times ۳^{۵}$

ج) $\binom{۱۰}{۴}\times ۳^{۴}\times ۲^{۶}$

د) $\binom{۱۰}{۸}\times ۳^{۸}\times ۲^{۲}+\binom{۱۰}{۹}\times ۳^{۹}\times ۲+\binom{۱۰}{۱۰}\times ۳^{۱۰}$

۱۳) الف) $\binom{۵}{۳}\binom{۲۱}{۷}\times ۱۰!$

ب) $\left(\binom{۵}{۳}\binom{۲۱}{۷}+\binom{۵}{۴}\binom{۲۱}{۶}+\binom{۵}{۵}\binom{۲۱}{۵}\right)\times ۱۰!$

۱۴) ابتدا دوم رقم انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال با این دو رقم به $۲^{۷}-۲$ طریق می‌توانیم عدد ۷ رقمی بسازیم به‌طوری‌که از هر دو رقم استفاده شود. پس پاسخ برابر $\binom{۵}{۲}(۲^{۷}-۲)$ است.

۱۵) الف) برای $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$، $\binom{۹}{۳}$ انتخاب و برای $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$، $\binom{۶}{۳}$ انتخاب وجود دارد. سپس $a_۷$، $a_۸$ و $a_۹$ به طور یکتا مشخص می‌شوند. پس پاسخ برابر $\binom{۹}{۳}\binom{۶}{۳}$ است.

ب) به $\binom{۹}{۴} \times ۴!$ طریق می‌توانیم $a_۶$، $a_۷$، $a_۸$ و $a_۹$ را تعیین کنیم. در بین ۵ عدد باقی‌مانده، کوچکترین عدد باید به $a_۱$ اختصاص یابد. سپس به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم $a_۲$ و $a_۳$ را تعیین کنیم و بعد از آن $a_۴$ و $a_۵$ به طور یکتا تعیین می‌شوند. پس پاسخ برابر $\binom{۴}{۲} \times ۴! \times \binom{۹}{۴}$ است.

ج) به $\binom{۹}{۳} \times ۳!$ طریق می‌توانیم $a_۷$، $a_۸$ و $a_۹$ را تعیین کنیم. در بین ۶ عدد باقی‌مانده، کوچکترین عدد باید به $a_۱$ اختصاص یابد. سپس برای $a_۶$، ۵ انتخاب وجود دارد. در بین ۴ عدد باقی‌مانده کوچکترین عدد باید به $a_۲$ اختصاص یابد. سپس برای $a_۵$، ۳ انتخاب وجود دارد و بعد از آن $a_۳$ و $a_۴$ به طور یکتا تعیین می‌شوند. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۹}{۳} \times ۳! \times ۵ \times ۳$$

د) مشابه استدلال قسمت قبل نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $۳ \times \binom{۶}{۲}\binom{۹}{۲}$ است.

۱۶) الف) $\binom{۹}{۲} \times ۵^{۷} \times ۶^{۱۰}$

ب) پرتاب‌های هفتم و هفدهم و همچنین دو پرتاب از ۶ پرتاب اول و سه پرتاب از بین پرتاب‌های هشتم تا شانزدهم باید ۶ باشند. برای هر یک از پرتاب‌های باقی‌مانده تا پرتاب هفدهم ۵ انتخاب و برای هر یک از سه پرتاب آخر ۶ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر $۶^{۳} \times ۵^{۱۰} \times \binom{۹}{۳}\binom{۶}{۲}$ است.

ج) $۶^{۷} \times ۴^{۶} \times \binom{۹}{۳}\binom{۱۱}{۲}$

د) دو پرتاب از یازده پرتاب اول باید ۶ باشد و برای هر یک از شش پرتاب آخر ۶ انتخاب وجود دارد. اگر پرتاب سیزدهم ۵ بیاید، در این صورت دو پرتاب و الا سه پرتاب از یازده پرتاب اول باید ۵ بیاید. لذا پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۱}{۲} \times ۶^{۶} \times \left(\binom{۹}{۲} \times ۴^{۷} + \binom{۹}{۳} \times ۴^{۶} \times ۵\right)$$

۱۷) الف) به $\binom{۲۰}{۸}\binom{۹}{۳}$ طریق می‌توانیم جای مهندسین را تعیین کنیم و بعد از آن افراد به $۱۸! \times ۱۲!$ طریق می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۹}{۳}\binom{۲۰}{۸} \times ۱۲! \times ۱۸!$$

ب) به $\binom{۱۰}{۳}\binom{۹}{۴}\binom{۹}{۳}$ طریق می‌توانیم جای مهندسین را تعیین کنیم. لذا پاسخ برابر است با

$$\binom{۹}{۳}\binom{۹}{۴}\binom{۱۰}{۳} \times ۱۲! \times ۱۸!$$

ج) به $\binom{۱۷}{۸}\binom{۱۱}{۳}$ طریق می‌توانیم جای مهندسین و به $\binom{۹}{۶}\binom{۸}{۳}$ طریق می‌توانیم جای دکترها را تعیین کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۱}{۳}\binom{۱۷}{۸}\binom{۸}{۳}\binom{۹}{۶} \times ۱۲! \times ۱۰! \times ۸!$$

د) دو حالت در نظر بگیرید. یک حالت این که روی صندلی شمارهٔ ۱۳ مهندسین بنشیند و حالت دیگر این که روی این صندلی دکتر یا معلم بنشیند. مشابه استدلال قسمت قبل نتیجه بگیرید پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۱}{۳}\left(\binom{۱۶}{۷}\binom{۸}{۴}\binom{۹}{۵} + \binom{۱۶}{۸}\binom{۹}{۴}\binom{۸}{۵}\right) \times ۱۲! \times ۱۰! \times ۸!$$

۱۸) الف) $\binom{۲۰}{۵}\binom{۱۵}{۷}$

ب) $\frac{۱}{۲}\binom{۲۰}{۸}\binom{۱۲}{۶}$

ج) $\frac{۱}{۴}\binom{۲۰}{۴}\binom{۱۶}{۴}\binom{۱۲}{۶}$

د) $\frac{۱}{۲\times۴!}\binom{۲۰}{۳}\binom{۱۷}{۳}\binom{۱۴}{۳}\binom{۱۱}{۳}\binom{۸}{۴}$

۱۹) $\frac{۱}{۲\times۳!}\binom{۲۵}{۴}\binom{۲۱}{۴}\binom{۱۷}{۴}\binom{۱۳}{۳}\binom{۱۰}{۳}$

۲۰) به $\frac{۱}{۲}\binom{۱۰}{۵}$ طریق می‌توان ۱۰ نفر را به دو گروه ۵ نفره تقسیم کرد که از این تعداد در $\binom{۶}{۱}$ حالت هر ۴ دکتر در یک گروه قرار دارند. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\binom{۱۰}{۵} - \binom{۶}{۱}$$

۲۱) الف) دو حالت در نظر می‌گیریم. یک حالت این که رقم سمت چپ فرد و حالت دیگر این که این رقم زوج باشد. در حالت اول $\binom{6}{3} \times 5^7$ عدد و در حالت دوم $\binom{6}{4} \times 4 \times 5^6$ عدد وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{6}{3} \times 5^7 + \binom{6}{4} \times 4 \times 5^6$$

ب) دو حالت در نظر می‌گیریم. حالت اول این که در عدد رقم صفر وجود نداشته باشد و حالت دوم این که رقم صفر وجود داشته باشد. در حالت اول $\binom{5}{4}\binom{4}{3} \times 7!$ عدد و در حالت دوم $\binom{5}{4}\binom{4}{2} \times 6 \times 6!$ عدد وجود دارد، پس پاسخ برابر است با

$$\binom{5}{4}\binom{4}{3} \times 7! + \binom{5}{4}\binom{4}{2} \times 6 \times 6!$$

۲۲) $\binom{20}{12} \times 4^8$

۲۳) $\binom{8}{6}^2 \times 6!$

۲۴) دو حالت وجود دارد. یکی این که در یک اتاق ۳ نفر و در هر یک از اتاق‌های باقی‌مانده یک نفر قرار گیرند و حالت دیگر این که در دو اتاق دو نفر و در بقیهٔ اتاق‌ها یک نفر قرار گیرند. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{10}{3} \times 8! + \frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2} \times 8!$$

۲۵) با در نظر گرفتن حالت‌هایی که در هر یک از اتاق‌های A و B، ۱، ۲ یا ۳ نفر قرار گیرند نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$\binom{8}{1}\binom{7}{1}(2^6 - 2) + \binom{8}{2}\binom{6}{2}(2^4 - 2) + \binom{8}{3}\binom{5}{3}(2^2 - 2)$$

۲۶) الف) به n طریق می‌توانیم یک ضلع از n ضلعی و به $n - 4$ طریق می‌توانیم یک رأس غیرمجاور با این ضلع را انتخاب کنیم. پس پاسخ برابر $n(n-4)$ است.

ب) کلاً $\binom{n}{۳}$ مثلث وجود دارد که از این تعداد $n(n-۴)$ مثلث یک ضلع و n مثلث دو ضلع مشترک با n ضلعی دارند. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{n}{۳} - n(n-۴) - n$$

۲۷) الف) دو حالت وجود دارد. حالت اول این که رأس‌های چهارضلعی روی دو ضلع از مثلث باشند که تعداد چهارضلعی‌ها در این حالت برابر $\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲}$ است. حالت دیگر این که رأس‌های چهارضلعی روی هر سه ضلع مثلث باشند که تعداد چهارضلعی‌ها در این حالت برابر $\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۲}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲} + \binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۲}$$

ب) باید از یک ضلع یک رأس و از هر یک از دو ضلع دیگر دو رأس انتخاب کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲}$$

۲۸) الف) $\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}$

ب) $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}$

ج) $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}$

۲۹) الف) طبق قضیهٔ ۱۸.۱.۳ پاسخ برابر $\binom{۹}{۴}$ است.

ب) یکی از ۱۲ نفر را در نظر گرفته و او را A بنامید. تعداد حالاتی که A انتخاب نمی‌شود برابر تعداد راه‌های انتخاب ۴ فرد غیرمجاور از بین ۱۱ نفر است که طبق قضیهٔ ۱۸.۱.۳ این تعداد برابر $\binom{۸}{۴}$ است و تعداد حالاتی که A انتخاب می‌شود برابر تعداد راه‌های انتخاب ۳ فرد غیرمجاور از بین ۹ نفر است (۹ نفر، افراد غیر از A و دو نفر مجاور با A هستند) که این تعداد برابر $\binom{۷}{۳}$ است. پس پاسخ برابر $\binom{۷}{۳} + \binom{۸}{۴}$ است.

۳۰) ۸ زن را به !۸ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم. به $\binom{۹}{۴}$ طریق می‌توانیم ۴ جا از ۹ فضای خالی بین زن‌ها را انتخاب کنیم و به !۸ طریق می‌توانیم ۸ مرد را در این ۴ جا قرار دهیم به‌طوری‌که در هر جا دقیقاً دو مرد قرار گیرند. پس پاسخ برابر $۸! \times \binom{۹}{۴} \times ۸!$ است.

۳۱) به ۱۵ طریق می‌توان ٦ فرد مجاور را انتخاب کرد، به $۲ \times \binom{۱۵}{۲}$ طریق می‌توان ۴ فرد مجاور در یک نقطه و دو فرد مجاور در نقطه‌ای دیگر انتخاب کرد، به $\binom{۱۵}{۲}$ طریق می‌توان ۳ فرد مجاور در یک نقطه و ۳ فرد مجاور در نقطه‌ای دیگر انتخاب کرد و به $\binom{۱۵}{۳}$ طریق می‌توان از ۳ نقطهٔ مختلف ۲ فرد مجاور را انتخاب کرد. پس پاسخ مسأله برابر است با

$$۱۵ + \binom{۱۵}{۲} \times ۲ + \binom{۱۵}{۲} + \binom{۱۵}{۳}$$

۳۲) ابتدا ۲۰ نفر را در یک صف قرار می‌دهیم. این کار را به !۲۰ طریق می‌توانیم انجام دهیم. سپس صف را از دوجا از ۱۹ فضای خالی بین ۲۰ نفر جدا می‌کنیم، قسمت اول صف را جلوی گیشهٔ اول، قسمت دوم را جلوی گیشهٔ دوم و قسمت سوم را جلوی گیشهٔ سوم می‌فرستیم. این کار ر به $\binom{۱۹}{۲}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ برابر $۲۰!\binom{۱۹}{۲}$ است.

۳۳) r عدد متوالی را به صورت $a+۱$، $a+۲$، ... و $a+r$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{(a+۱)(a+۲)\cdots(a+r)}{r!} = \frac{(a+r)!}{r!a!} = \binom{a+r}{r}$$

چون $\binom{a+r}{r}$ عددی صحیح است، پس حاصل‌ضرب $(a+۱)(a+۲)\cdots(a+r)$ بر $r!$ بخش‌پذیر است.

۳۴) چنان‌چه به ابتدای کلمات مورد نظر b و به انتهای آن‌ها a اضافه کنیم، کلماتی $n+۲$ حرفی با حروف a و b به‌دست می‌آوریم که با حرف b شروع و به حرف a ختم

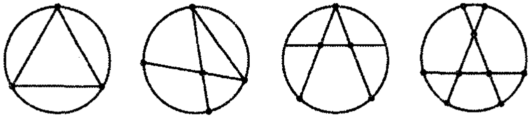
می‌شوند و دقیقاً m عبارت ab دارند. پس چنان‌چه در این کلمات از سمت چپ شروع به حرکت کنیم در $2m+1$ جا تغییر حرف داریم (m جا بعد از حرف a، b می‌آید و $m+1$ جا بعد از حرف b، a می‌آید). حال $n+2$ دایره در یک ردیف در نظر می‌گیریم و از $n+1$ فضای خالی بین این دایره‌ها $2m+1$ فضا را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{n+1}{2m+1}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال کلمه را به صورت منحصربفرد می‌توانیم تشکیل دهیم به این صورت که از ابتدای کلمه تا اولین فضای خالی انتخاب شده حرف b، از اولین تا دومین فضای خالی انتخاب شده حرف a، از دومین تا سومین فضای خالی انتخاب شده حرف b، ... قرار می‌دهیم.

۳۵) الف) باید تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی را که به صورت $\{a, a+d, a+2d, a+3d\}$ هستند بیابیم. اگر کوچکترین و بزرگترین عضو هر یک از این زیرمجموعه‌ها را تعیین کنیم، دو عضو دیگر به صورت منحصربفرد تعیین می‌شوند. با توجه به این که a و $a+3d$ هر دو به صورت $3k$ یا هر دو به صورت $3k+1$ یا هر دو به صورت $3k+2$ هستند و در مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 30\}$، ۱۰ عدد به صورت $3k$، ۱۰ عدد به صورت $3k+1$ و ۱۰ عدد به صورت $3k+2$ هستند، لذا پاسخ برابر $\binom{10}{2}+\binom{10}{2}+\binom{10}{2}$ است.

ب) مشابه استدلال قسمت قبل نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $\binom{7}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}$ است.

۳۶) الف) بسته به این که چند رأس از مثلث از نقاط روی دایره باشد چهار نوع مثلث وجود دارد. تعداد مثلث‌هایی که هر سه رأس آن‌ها روی دایره باشد برابر $\binom{n}{3}$، تعداد مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها روی دایره باشد برابر $4\binom{n}{4}$، تعداد مثلث‌هایی که یک رأس آن‌ها روی دایره باشد برابر $5\binom{n}{5}$ و تعداد مثلث‌هایی که هیچ رأس از آن‌ها روی دایره نباشد برابر $\binom{n}{6}$ است. به عنوان مثال چنان چه اضلاع مثلثی را که دو رأس آن روی دایره است امتداد دهیم چهار نقطه از n نقطهٔ اولیه را به‌دست می‌آوریم و برعکس متناظر با هر چهار نقطه از n نقطهٔ اولیه، ۴ مثلث وجود دارد که دو رأس آن متعلق

به این ۴ نقطه و اضلاع آن روی وترهای بین این ۴ نقطه باشد. پس تعداد چنین مثلث‌هایی برابر $\binom{n}{۴}$۴ است.



پس تعداد مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{n}{۳} + ۴\binom{n}{۴} + ۵\binom{n}{۵} + \binom{n}{٦}$$

ب) از هر یک از n نقطهٔ روی دایره $n - ۱$ پاره‌خط و از هر نقطهٔ تقاطع دو وتر ۴ پاره‌خط می‌گذرد. می‌دانیم تعداد نقاط تقاطع برابر $\binom{n}{۴}$ است. در مجموع

$$n(n-۱) + ۴\binom{n}{۴}$$

هر پاره‌خط دو بار محاسبه می‌شود، پس تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با

$$\frac{n(n-۱)}{۲} + ۲\binom{n}{۴}$$

۳۷) الف) $\binom{m}{۲}\binom{n}{۲}$

ب) $\binom{m}{۱}\binom{n}{۲} + \binom{m}{۲}\binom{n}{۱} + ۴\binom{m}{۲}\binom{n}{۲} + ۲\binom{m}{۲}\binom{n}{۳} + ۲\binom{m}{۳}\binom{n}{۲} + \binom{m}{۳}\binom{n}{۳}$

۳۸) الف) ۲۷ جا در یک صف در نظر بگیرید. مهندسین، دانشجویان و تاجرها، ۱۸ جا در این صف اشغال می‌کنند، لذا آن‌ها را به $\binom{۲۷}{۱۸}$!۱۸ طریق می‌توانیم در صف قرار دهیم. حال از ۹ جای باقی‌مانده ۵ جای اول به معلمین و ۴ جای بعدی به دکترها تعلق دارد، لذا آن‌ها را نیز به !۴!۵ طریق می‌توان در صف قرار داد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۲۷}{۱۸}۱۸!۵!۴!$$

ب) مهندسین و دانشجویان را به $\binom{27}{13}13!$ طریق و سپس معلمین، دکترها و تاجرها را به $5!4!5!$ طریق می‌توان در صف قرارداد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{27}{13}13!5!4!5!$$

ج) برای دانشجویان $\binom{27}{7}7!$، برای معلمین و دکترها $\binom{20}{9}5!4!$ و برای مهندسین و تاجرها $6!5!$ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر است با

$$\binom{27}{7}\binom{20}{9}7!5!4!6!5!$$

د) مهندسین، دانشجویان و تاجرها را به $\binom{27}{18}18!$ طریق می‌توانیم در صف قرار دهیم. آخرین جا از ۹ جای باقی‌مانده را باید به یک دکتر اختصاص دهیم، لذا برای آن ۴ انتخاب وجود دارد و ۸ جای باقی‌مانده را به $8!$ طریق می‌توانیم پر کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{27}{18}18!\times 4\times 8!$$

ه) مهندسین و دانشجویان را به $\binom{27}{13}13!$ طریق می‌توانیم در صف قرار دهیم. آخرین جا از ۱۴ جای باقی‌مانده را باید به یک تاجر اختصاص دهیم، لذا برای آن ۵ انتخاب وجود دارد. حال ۴ تاجر دیگر را به $\binom{13}{4}4!$ طریق می‌توانیم در صف قرار دهیم. مجدداً آخرین جا از ۹ جای باقی‌مانده باید به یک دکتر اختصاص یابد، لذا برای آن ۴ انتخاب وجود دارد و ۸ جای باقی‌مانده را به $8!$ طریق می‌توانیم پر کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{27}{13}\binom{13}{4}13!\times 5\times 4!\times 4\times 8!$$

و) برای دانشجویان $\binom{27}{7}7!$، برای معلمین و دکترها، $\binom{20}{9}\times 4\times 8!$ و برای مهندسین و تاجرها، $10!\times 5$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{27}{7}\binom{20}{9}7!\times 4\times 8!\times 5\times 10!$$

ز) برای مهندسین و دانشجویان $\binom{۲۷}{۱۳}$ ۱۳! انتخاب وجود دارد. ۵ جای اول از ۱۴ جای باقی‌مانده را باید به معلمین اختصاص دهیم، لذا برای معلمین ۵! انتخاب و برای دکترها و تاجرها ۹! انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۲۷}{۱۳} ۱۳! \times ۵! \times ۹!$$

ح) برای مهندسین و دانشجویان $\binom{۲۷}{۱۳}$ ۱۳! انتخاب وجود دارد. آخرین جا از ۱۴ جای باقی‌مانده را باید به یک تاجر اختصاص دهیم، لذا برای آن ۵ انتخاب وجود دارد و ۱۳ جای باقی‌مانده را به ۱۳! طریق می‌توانیم پر کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۲۷}{۱۳} ۱۳! \times ۵ \times ۱۳!$$

ط) چون می‌خواهیم اولین معلم و اولین دکتر مجاور باشند، لذا به جای ۲۷ جا، ۲۶ جا در یک صف در نظر می‌گیریم. مهندسین، دانشجویان و تاجرها را به $\binom{۲۶}{۱۸}$ ۱۸! طریق می‌توانیم در این صف قرار دهیم. در اولین جا از ۸ جای باقی‌مانده یک معلم و یک دکتر قرار می‌دهیم که به ۲ × ۴ × ۵ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم و ۷ جای باقی‌مانده را نیز به ۷! طریق می‌توانیم پر کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۲۶}{۱۸} ۱۸! \times ۴۰ \times ۷!$$

ی) ۲۵ جا در یک صف در نظر می‌گیریم. برای دانشجویان $\binom{۲۵}{۷}$ ۷! انتخاب وجود دارد. از ۱۸ جای باقی‌مانده ۸ جا انتخاب می‌کنیم، در اولین جا یک معلم و یک دکتر قرار می‌دهیم و در ۷ جای باقی‌مانده بقیهٔ معلمین و دکترها را قرار می‌دهیم. این کار را به ۷! × ۲ × ۴ × ۵ × $\binom{۱۸}{۸}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال در اولین جا از ۱۰ جای باقی‌مانده یک مهندس و یک تاجر قرار می‌دهیم و در ۹ جای باقی‌مانده بقیهٔ مهندسین و تاجرها را قرار می‌دهیم. این کار را نیز به ۹! × ۲ × ۵ × ٦ طریق می‌توانیم انجام

دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۲۵}{۷}\binom{۱۸}{۸}۷! \times ۴۰ \times ۷! \times ۶۰ \times ۹!$$

۳۹) ۱۰۰ جا در یک ردیف در نظر می‌گیریم. از ۱ تا ۱۰۰، ۳۳ عدد مضرب ۳ هستند. هیچ یک از این اعداد را در اولین جای خالی نباید قرار دهیم. این اعداد را به $۳۳!\binom{۹۹}{۳۳}$ طریق می‌توانیم در ۳۳ جا از ۹۹ جا قرار دهیم. در بین اعداد باقی‌مانده، ۳۴ عدد به صورت $۳k + ۱$ و ۳۳ عدد به صورت $۳k + ۲$ هستند. اگر اولین جای خالی با عددی به صورت $۳k + ۱$ پر شود، آنگاه دومین، سومین، چهارمین، ... جای خالی باید به ترتیب با اعدادی به صورت $۳k + ۱$، $۳k + ۲$، $۳k + ۲$، $۳k + ۱$، $۳k + ۱$، $۳k + ۲$، ... پر شوند و لذا اعداد به صورت $۳k + ۱$ را به $۳۴!$ و اعداد به صورت $۳k + ۲$ را به $۳۳!$ طریق می‌توانیم در جاهای خالی قرار دهیم و اگر اولین جای خالی با عددی به صورت $۳k + ۲$ پر شود، آنگاه جاهای خالی بعدی به ترتیب باید با اعدادی به صورت $۳k + ۲$، $۳k + ۱$، $۳k + ۱$، $۳k + ۲$، $۳k + ۲$، $۳k + ۱$، ... پر شوند که این نتیجه می‌دهد تعداد اعداد به صورت $۳k + ۱$ از تعداد اعداد به صورت $۳k + ۲$ بیشتر نیست، پس در این حالت جایگشتی وجود ندارد و لذا پاسخ برابر است با

$$\binom{۹۹}{۳۳}۳۳!۳۴!۳۳!$$

۴۰) الف) به n طریق می‌توانیم یک ضلع از n ضلعی را انتخاب کنیم. رأس‌های مجاور این ضلع را دیگر نمی‌توانیم انتخاب کنیم، لذا باید دو رأس غیرمجاور از $n - ۴$ رأس دیگر انتخاب کنیم که این کار را به $\binom{n-۴}{۲} - (n - ۵)$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$n(\binom{n-۴}{۲} - (n - ۵))$$

ب) به n طریق می‌توانیم دو ضلع مجاور از n ضلعی را انتخاب کنیم. حال یک رأس دیگر از n ضلعی را که با هیچ یک از این دو ضلع مجاور نیست به $n - ۵$ طریق

می‌توانیم انتخاب کنیم. لذا $n(n-5)$ چهارضلعی وجود دارد که دقیقاً دو ضلع مجاور از n ضلعی را دارند. حال به $\binom{n}{2}$ طریق می‌توانیم دو ضلع از n ضلعی را انتخاب کنیم که در n حالت این دو ضلع مجاورند و در n حالت بین این دو ضلع دقیقاً یک ضلع دیگر قرار دارد که این دو حالت مطلوب نیستند، لذا $\binom{n}{2} - 2n$ چهارضلعی وجود دارد که دو ضلع آن بر دو ضلع غیرمجاور از n ضلعی منطبق است. پس پاسخ برابر است با

$$n(n-5) + \binom{n}{2} - 2n$$

بخش ۳–۲

۱) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

۲) $\binom{17}{5} \times 3^5 \times (-5)^{12}$

۳) جملهٔ عمومی بسط $(x + \frac{1}{x})^{100}$ به صورت

$$\binom{100}{k} x^{100-k} (\frac{1}{x})^k = \binom{100}{k} x^{100-2k}$$

است. لذا ضریب x^8، x^{15} و x^{64} در این بسط به ترتیب برابر $\binom{100}{46}$، صفر و $\binom{100}{18}$ است.

۴) جملهٔ عمومی بسط $(x^2 - \frac{1}{x})^{100}$ به صورت

$$\binom{100}{k} (x^2)^{100-k} (-\frac{1}{x})^k = (-1)^k \binom{100}{k} x^{200-3k}$$

است. لذا ضریب x^{100}، x^{101} و x^{102} به ترتیب برابر صفر، $-\binom{100}{33}$ و صفر است.

۵) الف) مجموع داده شده بسط $(2+1)^n$ است، لذا حاصل این مجموع برابر 3^n است.

ب) $(1-3)^n$

ج) $(2+1)^n$

د) $(2+3)^n$

۶) الف) بسط $(۱+۱)^n$ را در نظر بگیرید.

ب) از

$$(۱-۱)^n = \binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \binom{n}{۳} + \cdots + (-۱)^n \binom{n}{n}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \cdots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \binom{n}{۵} + \cdots$$

با تلفیق این رابطه و رابطهٔ قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم حاصل هر یک از این دو مجموع برابر $۲^{n-۱}$ است.

۷) الف) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۲}{k-۱} + \binom{n-۳}{k-۱} + \binom{n-۳}{k} &= \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۲}{k-۱} \\ &\quad + \binom{n-۲}{k} \\ &= \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۱}{k} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

ب) می‌توان نوشت

$$\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱}\right) + ۲\left(\binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k-۲}\right) + \left(\binom{n}{k-۲} + \binom{n}{k-۳}\right)$$

$$= \binom{n+۱}{k} + ۲\binom{n+۱}{k-۱} + \binom{n+۱}{k-۲}$$

$$= \left(\binom{n+۱}{k} + \binom{n+۱}{k-۱}\right) + \left(\binom{n+۱}{k-۱} + \binom{n+۱}{k-۲}\right)$$

$$= \binom{n+۲}{k} + \binom{n+۲}{k-۱} = \binom{n+۳}{k}$$

ج) از اتحاد پاسکال دو رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$\binom{\text{۲}n}{n}+\binom{\text{۲}n}{n-\text{۱}}=\binom{\text{۲}n+\text{۱}}{n},\qquad \binom{\text{۲}n+\text{۱}}{n}+\binom{\text{۲}n+\text{۱}}{n+\text{۱}}=\binom{\text{۲}n+\text{۲}}{n+\text{۱}}$$

و چون $\binom{\text{۲}n+\text{۱}}{n+\text{۱}}=\binom{\text{۲}n+\text{۱}}{n}$، پس $\binom{\text{۲}n+\text{۱}}{n}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{\text{۲}n+\text{۲}}{n+\text{۱}}$.

د) با توجه به اتحاد پاسکال روابط زیر را داریم

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\text{۰}} &= \binom{n+\text{۱}}{\text{۰}}\\
\binom{n+\text{۱}}{\text{۱}} &= \binom{n+\text{۲}}{\text{۱}}-\binom{n+\text{۱}}{\text{۰}}\\
\binom{n+\text{۲}}{\text{۲}} &= \binom{n+\text{۳}}{\text{۲}}-\binom{n+\text{۲}}{\text{۱}}\\
\binom{n+\text{۳}}{\text{۳}} &= \binom{n+\text{۴}}{\text{۳}}-\binom{n+\text{۳}}{\text{۲}}\\
&\vdots\\
\binom{n+k}{k} &= \binom{n+k+\text{۱}}{k}-\binom{n+k}{k-\text{۱}}
\end{aligned}$$

از جمع این روابط تساوی خواسته شده نتیجه می‌شود.

۸) می‌توان نوشت

$$\frac{\binom{n}{k+\text{۱}}}{\binom{n}{k}}=\frac{\frac{n!}{(k+\text{۱})!(n-k-\text{۱})!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=\frac{n-k}{k+\text{۱}}$$

پس اگر $n-k>k+\text{۱}$ یا معادلاً $k<\frac{n-\text{۱}}{\text{۲}}$، آنگاه $\binom{n}{k+\text{۱}}>\binom{n}{k}$ و اگر $n-k<k+\text{۱}$ یا معادلاً $k>\frac{n-\text{۱}}{\text{۲}}$، آنگاه $\binom{n}{k+\text{۱}}<\binom{n}{k}$.

۹) الف) تعداد راه‌های انتخاب یک تیم k نفره از بین n نفر و سپس انتخاب یکی از افراد تیم به عنوان کاپیتان از یک سو برابر $k\binom{n}{k}$ و از سوی دیگر برابر $n\binom{n-\text{۱}}{k-\text{۱}}$ است زیرا اگر ابتدا کاپیتان تیم را انتخاب کنیم n انتخاب داریم و بعد از آن به $\binom{n-\text{۱}}{k-\text{۱}}$ طریق می‌توانیم

بقیهٔ اعضای تیم را انتخاب کنیم.

ب) فرض کنید می‌خواهیم یک تیم از بین n نفر انتخاب و یکی از اعضای تیم را به عنوان کاپیتان معرفی کنیم. بسته به این که تعداد اعضای تیم برابر ۱، ۲، ... یا n باشد، تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با

$$۱\binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲} + ۳\binom{n}{۳} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

از سوی دیگر می‌توانیم ابتدا کاپیتان و سپس بقیهٔ اعضای تیم را انتخاب کنیم. به n طریق می‌توانیم کاپیتان را انتخاب کنیم و به $۲^{n-۱}$ طریق می‌توانیم تعدادی از $n-۱$ نفر باقی‌مانده را انتخاب کنیم، پس به $n۲^{n-۱}$ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

ج) $k^۲\binom{n}{k}$ برابر تعداد راه‌های انتخاب یک تیم k نفره از بین n نفر و سپس انتخاب یک کاپیتان و یک سرپرست از بین اعضای تیم است. از سوی دیگر اگر ابتدا کاپیتان و سرپرست و سپس بقیهٔ اعضای تیم را انتخاب کنیم این تعداد برابر $n\binom{n-۱}{k-۱} + n(n-۱)\binom{n-۲}{k-۲}$ می‌شود، زیرا اگر کاپیتان و سرپرست یکسان باشند برای آن n انتخاب و برای بقیهٔ اعضای تیم $\binom{n-۱}{k-۱}$ انتخاب و اگر کاپیتان و سرپرست یکسان نباشند برای آن‌ها $n(n-۱)$ انتخاب و برای بقیه اعضای تیم $\binom{n-۲}{k-۲}$ انتخاب وجود دارد.

هـ) تعداد راه‌های انتخاب یک تیم فوتبال k نفره از بین n نفر و تعیین r نفر از اعضای تیم به عنوان اعضای اصلی را به دو روش مختلف بیابید.

و) تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته k نفره از بین m مرد و n زن برابر $\binom{m+n}{k}$ است و از سوی دیگر بسته به این که از بین m مرد، k، $k-۱$، $k-۲$، ... یا ۰ نفر انتخاب شوند، تعداد راه‌های انتخاب کمیته برابر سمت چپ تساوی داده شده می‌شود.

ز) فرض کنید می‌خواهیم از بین n نفری که در یک شرکت مشغول به کار هستند یک نفر را به عنوان رئیس انتخاب کنیم و بقیه را بین اتاق‌های A، B، C و D تقسیم

کنیم. برای رئیس n انتخاب و برای هر یک از افراد باقی‌مانده ۴ انتخاب داریم، پس به $n4^{n-1}$ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. از سوی دیگر تعداد حالاتی که در اتاق‌های A، B و C جمعاً k نفر قرار می‌گیرند برابر $\binom{n}{k+1}3^k \times (k+1)$ است. زیرا ابتدا $k+1$ نفر را از بین n نفر انتخاب می‌کنیم، سپس یکی از این افراد را به عنوان رئیس در نظر می‌گیریم و بعد از آن هر یک از k نفر باقی‌مانده را در یکی از اتاق‌های A، B و C و بقیهٔ افراد را در اتاق D قرار می‌دهیم. حال بسته به این که k برابر ۰، ۱، ۲، ... یا $n-1$ باشد تعداد راه‌های انجام کار برابر سمت چپ تساوی داده شده است.

ح) فرض کنید می‌خواهیم یک تیم k نفره از بین n نفر انتخاب کنیم و بر تن هر یک لباس آبی یا قرمز بپوشانیم. تعداد راه‌های انجام این کار برابر $\binom{n}{k}2^k$ است. از سوی دیگر تعداد حالاتی که i عضو تیم لباس آبی و $k-i$ عضو دیگر لباس قرمز بر تن می‌کنند برابر $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$ است. حال بسته به این که i برابر ۰، ۱، ۲، ... یا k باشد تعداد راه‌های انجام کار برابر سمت چپ تساوی داده شده است.

ط) فرض کنید $n+1$ نفر به ترتیب قد در یک صف ایستاده‌اند. به $\binom{n+1}{k+t+1}$ طریق می‌توانیم $k+t+1$ نفر از آن‌ها را انتخاب کنیم. تعداد حالاتی که $k+1$ امین فرد انتخاب شده $j+1$ امین فرد قرار گرفته در صف باشد برابر $\binom{j}{k}\binom{n-j}{t}$ است. حال بسته به این که j برابر k، $k+1$، ... یا $n-t$ باشد تعداد راه‌های انجام کار برابر سمت چپ تساوی داده شده است.

ی) تعداد راه‌های انتخاب یک کمیتهٔ n نفره از بین n مرد و n زن و انتخاب یک مرد به عنوان رئیس کمیته برابر $n\binom{2n-1}{n-1}$ است. تعداد حالاتی که k عضو کمیته مرد و $n-k$ عضو کمیته زن باشند برابر است با

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \times k = k\binom{n}{k}^2$$

حال بسته به این که k برابر ۱، ۲، ... یا n باشد تعداد راه‌های انجام کار برابر سمت چپ تساوی داده شده است.

۱۰) مشابه مسأله ۶.۲.۳ عمل کنید.

۱۱) با توجه به اتحاد پاسکال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k} &= \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1} \\
\binom{m+1}{k} &= \binom{m+2}{k+1} - \binom{m+1}{k+1} \\
\binom{m+2}{k} &= \binom{m+3}{k+1} - \binom{m+2}{k+1} \\
&\vdots \\
\binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

با جمع کردن این تساوی‌ها رابطهٔ خواسته شده به‌دست می‌آید.

۱۲) اگر $0 \le k \le m-1$، آنگاه ضریب x^k در عبارت داده شده برابر

$$\binom{m}{k} + \binom{m+1}{k} + \binom{m+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k}$$

است که این مقدار طبق مسأله قبل برابر $\binom{n+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$ است و اگر $k \ge m$، آنگاه اولین جمله‌ای از عبارت داده شده که در بسط آن x^k ظاهر می‌شود، $(1+x)^k$ است، لذا ضریب x^k در عبارت داده شده برابر

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k}$$

است که این مقدار طبق مسألهٔ قبل برابر $\binom{n+1}{k+1}$ است.

۱۳) از اتحاد داده شده در مسألهٔ ۷ ـ د استفاده کنید.

۱۴) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
۷^n - ۱۸n^۲ + ۱۲n - ۱ &= (۱+٦)^n - ۱۸n^۲ + ۱۲n - ۱ \\
&= \left(۱ + ٦\binom{n}{۱} + ٦^۲\binom{n}{۲} + ٦^۳\binom{n}{۳} + \cdots + ٦^n\binom{n}{n}\right) \\
&\quad -۱۸n^۲ + ۱۲n - ۱ \\
&= \left(۱ + ٦n + ۱۸n(n-۱) + ٦^۳\binom{n}{۳} + \cdots + ٦^n\binom{n}{n}\right) \\
&\quad -۱۸n^۲ + ۱۲n - ۱ \\
&= ٦^۳\left(\binom{n}{۳} + ٦\binom{n}{۴} + \cdots + ٦^{n-۳}\binom{n}{n}\right) \\
&= ۲۱٦k
\end{aligned}$$

۱۵) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\binom{۲n+k}{n}\binom{۲n-k}{n} &= \frac{(۲n+k)!}{n!(n+k)!} \times \frac{(۲n-k)!}{n!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+k+۱)\cdots(۲n+k)(n-k+۱)\cdots(۲n-k)}{(n!)^۲} \\
&= \frac{۱}{(n!)^۲}[(n+k+۱)(n-k+۱)] \\
&\quad \times[(n+k+۲)(n-k+۲)]\cdots[(۲n+k)(۲n-k)]
\end{aligned}$$

در هر کروشه حاصل‌ضرب دو جمله نوشته شده است که مجموع آن‌ها ثابت است، لذا در هر کروشه حاصل‌ضرب وقتی حداکثر مقدار ممکن را دارد که دو جملهٔ داخل آن برابر باشند و در هر کروشه فقط وقتی این اتفاق می‌افتد که k برابر صفر باشد. پس حداکثر مقدار عبارت داده شده وقتی به‌دست می آید که k برابر صفر باشد.

۱٦) با توجه به رابطهٔ

$$\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

مجموع داده شده برابر است با

$$\frac{1}{\binom{n}{m}}\left(\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\cdots+\binom{n-m}{0}\right)$$

و مجموع داخل پرانتز طبق مسألهٔ ۷ ـ د برابر $\binom{n+1}{m}$ است.

۱۷) در مسألهٔ ۹ ـ و فرض کنید $k=m=n$.

۱۸) در مسألهٔ ۹ـ و فرض کنید $m=n$ و $k=n-1$.

۱۹) با توجه به مسألهٔ ۹ ـ الف می‌توان نوشت

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-4\binom{n}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}$$
$$=n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}-n\binom{n-1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n-1}{n-1}$$
$$=n(1-1)^{n-1}=0$$

فصل ۴

بخش ۴ـ۱

۱) الف) $\frac{11!}{2!2!2!}$

ب) $\frac{8!}{2!2!}\times\frac{4!}{2!}$

ج) $\frac{7!}{2!2!}\times\binom{8}{4}\times\frac{4!}{2!}$

د) به جای حروف صدادار x می‌گذاریم. تعداد جایگشت‌هایی که با x شروع می‌شوند برابر $\frac{10!}{2!2!3!}$ است. حال به جای ۴ حرف x به $\frac{4!}{2!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را قرار دهیم. پس پاسخ برابر $\frac{4!}{2!}\times\frac{10!}{2!2!3!}$ است.

هـ) به جای حروف صدادار و بی‌صدا به ترتیب حرف x و y قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌هایی که با x شروع و به y تمام می‌شوند برابر $\frac{9!}{3!6!}$ است. حال به $\frac{4!}{2!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای ۴ حرف x و به $\frac{7!}{2!2!}$ طریق می‌توانیم حروف بی‌صدا

را به جای ۷ حرف y قرار دهیم. پس پاسخ برابر $\frac{۹!}{۳!۶!} \times \frac{۴!}{۲!} \times \frac{۷!}{۲!۲!}$ است.

و) به‌جای حروف صدادار x قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های بستهٔ xhx به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{۹!}{۲!۲!۲!}$ است. حال به $\frac{۴!}{۲!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای ۴ حرف x قرار دهیم. پس پاسخ برابر $\frac{۴!}{۲!} \times \frac{۹!}{۲!۲!۲!}$ است.

ز) چون ۴ حرف صدادار و ۷ حرف بی‌صدا وجود دارد، لذا جایگشت‌های مورد نظر به یکی از ۵ صورت زیر هستند (x نمایندهٔ حرف صدادار و y نمایندهٔ حرف بی‌صدا است).

$$xyyxyyxyyxy, \quad yxyxyyxyyxy, \quad yxyyxyxyyxy,$$

$$yxyyxyyxyxy, \quad yxyyxyyxyyx$$

پس پاسخ برابر $\frac{۷!}{۲!۲!} \times \frac{۴!}{۲!} \times ۵$ است.

۲) الف) $\frac{۱۳!}{۳!۲!۳!}$

ب) $\frac{۶!}{۳!} \times \frac{۱۱!}{۴!۲!۳!}$

ج) به جای حروف صدادار x می‌گذاریم. تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{۱۳!}{۶!۲!۳!}$ می‌شود. حال به یک طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای ۶ حرف x قرار دهیم.

د) همهٔ حروف غیر از ۳ حرف t را به $\frac{۱۰!}{۲!۳!}$ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم. حال ۳ حرف t را به $\binom{۹}{۳}$ طریق می‌توانیم در فضاهای خالی قرار دهیم به‌طوری‌که هیچ یک در سمت چپ حرف n قرار نگیرند. پس پاسخ برابر $\binom{۹}{۳}\frac{۱۰!}{۲!۳!}$ است.

هـ) به جای حروف صدادار x می‌گذاریم. تعداد جایگشت‌های بستهٔ sx (یا xs) به همراه بقیهٔ حروف برابر $۲ \times \frac{۱۲!}{۲!۳!۵!}$ است. در این عبارت هر جایگشتی که در آن حرف s فقط با یک x مجاور باشد یک بار و هر جایگشتی که حرف s با دو حرف x مجاور است دوبار محاسبه شده است. تعداد جایگشت‌هایی که حرف s با دو حرف x مجاور باشد برابر $\frac{۱۱!}{۲!۳!۴!}$ است، پس در $\frac{۱۱!}{۲!۳!۴!} - ۲ \times \frac{۱۲!}{۲!۳!۵!}$ جایگشت حرف s با حداقل یک حرف x مجاور است. لذا پاسخ مسأله برابر است با

$$\left(\frac{۱۳!}{۶!۲!۳!} - \frac{۱۲!}{۲!۳!۵!} \times ۲ + \frac{۱۱!}{۲!۳!۴!}\right) \times \frac{۶!}{۳!}$$

و) تعداد جایگشت‌های حروف بی‌صدا برابر $\frac{۷!}{۲!۳!}$ است. حروف صدادار را به $\binom{۸}{۶}\frac{۶!}{۳!}$ طریق می‌توانیم در فضاهای خالی بین حروف بی‌صدا قرار دهیم که در $\binom{۶}{۳}\binom{۵}{۳}۳!$ حالت هیچ یک از سه حرف i با حرف s مجاور نیستند زیرا از ۸ فضای خالی بین حروف بی‌صدا دوتا با حرف s مجاورند، لذا ۳ حرف i را در ۳ فضا از ۶ فضای دیگر قرار می‌دهیم و ۳ حرف صدادار دیگر را در ۳ فضا از ۵ فضای باقی‌مانده قرار می‌دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۲!۳!}\left(\binom{۸}{۶}\frac{۶!}{۳!}-\binom{۶}{۳}\binom{۵}{۳}۳!\right)$$

ز) تعداد جایگشت‌های حروف بی‌صدا برابر $\frac{۷!}{۲!۳!}$ است. به $\binom{۸}{۳}$ طریق می‌توانیم ۳ فضا از ۸ فضای خالی بین این حروف را انتخاب کنیم و به $\frac{۶!}{۳!}$ طریق می‌توانیم در هر یک از ۳ فضای انتخاب شده دو حرف صدادار قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۲!۳!}\times\binom{۸}{۳}\times\frac{۶!}{۳!}$$

ح) به جای حروف صدادار x می‌گذاریم. چون ۶ حرف صدادار و ۳ حرف t وجود دارد، لذا باید تعداد جایگشت‌هایی را حساب کنیم که سه تا xtx دارند. تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{۷!}{۳!۲!}$ است و به $\frac{۶!}{۳!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای حروف x قرار دهیم. پس پاسخ برابر $\frac{۷!}{۳!۲!}\times\frac{۶!}{۳!}$ است.

ط) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از t برابر $\frac{۱۰!}{۳!۲!}$ است. به $\binom{۳}{۲}$ طریق می‌توانیم در سمت چپ دو حرف i حرف t قرار دهیم و سپس به ۱۰ طریق می‌توانیم یک حرف باقی‌ماندهٔ t را بین بقیهٔ حروف قرار دهیم به‌طوری‌که سمت چپ حرف i قرار نگیرد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱۰!}{۳!۲!}\times\binom{۳}{۲}\times ۱۰$$

ی) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از n برابر $\frac{۱۱!}{۲!۳!}$ است. به ۳ طریق می‌توانیم یک حرف n را در سمت راست یکی از حروف t قرار دهیم و برای دیگر حرف n، ۱۰ انتخاب

داریم. پس پاسخ برابر $\frac{۱۱!}{۳!۳!} \times ۳ \times ۱۰$ است.

۳) الف) $\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!}$

ب) $\frac{۹!}{۲!۲!} \times ۲ - \frac{۸!}{۲!۲!}$

ج) $\frac{۹!}{۲!} - \frac{۸!}{۲!۲!}$

د) $\frac{۸!}{۳!۲!} \times \frac{۵!}{۲!۲!}$

هـ) $\frac{۸!}{۲!۲!۲!} \times ۲ \times ۲ + \frac{۶!}{۲!} \times P(۷, ۲)$

و) $\frac{۶!}{۲!} \times \frac{۵!}{۲!۲!} + ۶! \times \frac{۵!}{۲!۲!}$

ز) به جای هر حرف صدادار x قرار می‌دهیم. به $\frac{۵!}{۲!}$ طریق می‌توانیم حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار دهیم. به ۶ طریق می‌توانیم ۶ حرف x را در یکی از فضاهای خالی بین حروف بی‌صدا قرار دهیم، به $P(۶, ۲)$ طریق می‌توانیم در یک فضای خالی دو حرف x و در فضای خالی دیگر چهار حرف x قرار دهیم، به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توانیم در دو فضای خالی سه حرف x قرار دهیم و به $\binom{۶}{۳}$ طریق می‌توانیم در سه فضای خالی دو حرف x قرار دهیم. در نهایت به $\frac{۵!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای ۵ حرف x قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۵!}{۲!}\left(۶ + P(۶, ۲) + \binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۳}\right)\frac{۵!}{۲!۲!}$$

۴) الف) $\left(\frac{۱۲!}{۵!۳!۲!} \times ۲ - \frac{۱۱!}{۴!۳!۲!}\right) \times \frac{۶!}{۲!۲!}$

ب) $\frac{۱۲!}{۲!۲!} - \frac{۱۱!}{۲!۲!}$

ج) چون سه حرف n و دو حرف a وجود دارد، پس باید تعداد جایگشت‌هایی را بیابیم که عبارت $nanan$ را دارند. تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{۹!}{۲!}$ است.

د) مشابه مسألهٔ ۲ ـ ح عمل کنید. پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۳!۲!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

ه) $\binom{۹}{۳} \times \frac{۱۰!}{۲!۲!۲!}$

و) ابتدا همهٔ حروف غیر از حروف n را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم که در $\frac{۹!}{۲!۲!}$ تا از این جایگشت‌ها دو حرف t با یکدیگر مجاورند. اگر در یکی از این جایگشت‌ها دو حرف t مجاور نباشند، برای سه حرف n، $\binom{۱۱}{۳}$ و اگر دو حرف t مجاور باشند، برای سه حرف n، $\binom{۱۰}{۲}$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۹!}{۲!۲!} \times \binom{۱۰}{۲} + (\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!} - \frac{۹!}{۲!۲!}) \times \binom{۱۱}{۳}$$

ز) ابتدا همهٔ حروف غیر از حروف n را در یک ردیف قرار می‌دهیم، سپس سه حرف n را طوری در فضاهای خالی قرار می‌دهیم که هیچ یک مجاور t قرار نگیرند. به $\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از n رادر یک ردیف قرار دهیم. اگر در یک جایگشت دو حرف t مجاور باشند، $\binom{۸}{۳}$ انتخاب برای سه حرف n و اگر دو حرف t مجاور نباشند، $\binom{۷}{۳}$ انتخاب برای سه حرف n وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۹!}{۲!۲!} \times \binom{۸}{۳} + (\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!} - \frac{۹!}{۲!۲!}) \times \binom{۷}{۳}$$

ح) مشابه مسألهٔ ۲ ـ ز عمل کنید. پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۳!۲!} \times \binom{۸}{۳} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

ط) دو بستهٔ ta در نظر بگیرید. تعداد جایگشت‌های این دو بسته به همراه بقیهٔ حروف برابر $۲ \times ۲ \times \frac{۱۱!}{۲!۲!۳!}$ است. علاوه بر جایگشت‌هایی که در آن‌ها هر حرف t دقیقاً با یک حرف a مجاور است، جایگشت‌هایی که در آن‌ها عبارت $atat$ یا $tata$ وجود دارد نیز محاسبه شده‌اند. تعداد این جایگشت‌ها برابر $۲ \times \frac{۱۰!}{۲!۳!}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۲!۲!۳!} \times ۲ \times ۲ - \frac{۱۰!}{۲!۳!} \times ۲$$

ی) به جای حروف صدادار x و به جای حروف بی‌صدا غیر از t، y قرار می‌دهیم. دو بستهٔ xty در نظر می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های این دو بسته به همراه بقیهٔ حروف x و y برابر $\frac{۹!}{۴!۳!۲!} \times ۲ \times ۲$ است. حال به $\frac{۶!}{۲!۲!} \times \frac{۵!}{۳!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای حروف x و حروف بی‌صدا را به جای حروف y قرار دهیم. علاوه بر این جایگشت‌ها، جایگشت‌هایی که عبارت $xttx$ دارند نیز مطلوب هستند. تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{۱۰!}{۳!۴!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۹!}{۴!۳!۲!} \times ۲ \times ۲ \times \frac{۵!}{۳!} \times \frac{۶!}{۲!۲!} + \frac{۱۰!}{۳!۴!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

۵) الف) تعداد جایگشت‌های حروف کلمه غیر از ۴ حرف s برابر $\frac{۷!}{۴!۲!}$ است. به $\binom{۴}{۳}$ طریق می‌توانیم ۳ حرف s را در سمت چپ سه حرف i قرار دهیم و به ۷ طریق می‌توانیم چهارمین حرف s را طوری قرار دهیم که سمت چپ هیچ حرف i ای قرار نگیرد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۴!۲!} \times \binom{۴}{۳} \times ۷$$

ب) به $\frac{۷!}{۴!۲!}$ طریق می‌توانیم همهٔ حروف غیر از ۴ حرف s را در یک ردیف قرار دهیم. سپس به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم دو حرف s را در سمت چپ دو حرف i قرار دهیم. حال دو حرف s باقی‌مانده را باید طوری در فضاهای خالی قرار دهیم که در سمت چپ هیچ حرف i ای قرار نگیرند. چون ۶ فضای خالی مطلوب وجود دارد، لذا به ۶ طریق می‌توان دو حرف s را در یک فضای خالی و به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توان دو حرف s را در دو فضای خالی متمایز قرار داد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۴!۲!} \times \binom{۴}{۲} \times \left(۶ + \binom{۶}{۲}\right)$$

ج) تعداد جایگشت‌های دو بستهٔ ipi به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{۷!}{۴!۲!}$ و تعداد جایگشت‌های بسته $ipipi$ به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{۷!}{۴!}$ است. لذا پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۴!۲!} + \frac{۷!}{۴!}$$

د) مشابه مسألهٔ ۴ ـ و عمل کنید. پاسخ برابر است با

$$\frac{6!}{4!} \times \binom{7}{3} + (\frac{7!}{4!2!} - \frac{6!}{4!}) \times \binom{8}{4}$$

ه) تعداد جایگشت‌های

$$m, ss, ss, ii, ii, pp$$

برابر $\frac{6!}{2!2!}$ و تعداد جایگشت‌های هر یک از دسته‌های

$$m, ss, ss, iiii, pp \qquad m, ssss, ii, ii, pp$$

برابر $\frac{5!}{2!}$ و تعداد جایگشت‌های

$$m, ssss, iiii, pp$$

برابر!۴ است. لذا پاسخ برابر $\frac{6!}{2!2!} - 2 \times \frac{5!}{2!} + 4!$ است.

۶) الف) $\binom{4}{2}\frac{10!}{3!3!2!2!} + \binom{4}{3}\frac{10!}{3!3!3!}$

ب) $\binom{4}{2}\frac{10!}{2!2!3!3!} + \binom{4}{3}\frac{10!}{2!2!2!4!}$

۷) الف) از یک حرف دوبار و از هشت حرف یک بار باید استفاده کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{26}{1}\binom{25}{8}\frac{10!}{2!}$$

ب) دو حالت وجود دارد. یک حالت این که از یک حرف سه بار و از هفت حرف یک بار استفاده کنیم. حالت دیگر این که از دو حرف دو بار و از شش حرف یک بار استفاده کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{26}{1}\binom{25}{7}\frac{10!}{3!} + \binom{26}{2}\binom{24}{6}\frac{10!}{2!2!}$$

ج) مشابه روشی که در دو قسمت قبل به‌کار بردیم نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$\binom{26}{1}\binom{25}{6}\frac{10!}{4!} + \binom{26}{1}\binom{25}{1}\binom{24}{5}\frac{10!}{3!2!} + \binom{26}{3}\binom{23}{4}\frac{10!}{2!2!2!}$$

۸) الف) $\binom{11}{5} \times \frac{5!}{4!} \times \frac{5!}{3!2!}$

ب) $\binom{10}{5} \times \frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

ج) $\binom{11}{1}\binom{9}{3}\frac{5!}{3!2!}$

د) ۱۱ مکان در یک ردیف در نظر بگیرید. حرف m را به ۱۱ طریق می‌توانیم در یکی از این ۱۱ مکان قرار دهیم. اولین جای خالی از ۱۰ مکان باقی‌مانده را باید به حرف i اختصاص دهیم و ۹ حرف باقی‌مانده را به $\frac{9!}{3!4!2!}$ طریق می‌توانیم در ۹ مکان باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$11 \times \frac{9!}{3!4!2!}$$

۹) الف) ۱۸ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. حروف غیر از حروف n، s، e و l را به $\binom{18}{5}5!$ طریق می‌توانیم در ۵ مکان از ۱۸ مکان قرار دهیم. سپس از ۱۳ مکان باقی‌مانده ٦ تا را برای حروف n و s انتخاب می‌کنیم. اولین جا از این ٦ مکان را باید به حرف n اختصاص دهیم و ۵ مکان باقی‌مانده را به $\frac{5!}{2!3!}$ طریق می‌توانیم پر کنیم. حال در اولین جا از ۷ مکان باقی‌مانده باید حرف e قرار دهیم و ٦ مکان باقی‌مانده را به $\frac{6!}{4!2!}$ طریق می‌توانیم پر کنیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{18}{5}\binom{13}{6}5! \times \frac{5!}{2!3!} \times \frac{6!}{4!2!}$$

ب) ۱٦ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. حروف غیر از حروف n، s، e و l را به $\binom{16}{5}5!$ طریق می‌توانیم در ۵ جا از این ۱٦ مکان قرار دهیم. از ۱۱ مکان باقی‌مانده ۵ جا را انتخاب می‌کنیم، در اولین مکان عبارت ns و در ۴ مکان باقی‌مانده ۲ حرف n و ۲ حرف s را به دلخواه قرار می‌دهیم. سپس در اولین مکان از ٦ مکان باقی‌مانده عبارت el و در ۵ مکان باقی‌مانده ۴ حرف e و یک حرف l را به دلخواه قرار می‌دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{16}{5}\binom{11}{5}5! \times \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{4!}$$

ج) ۱۷ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. حروف غیر از n و s را به $\binom{۱۷}{۱۲} \times \frac{۱۲!}{۵!۲!}$ طریق می‌توانیم در ۱۲ مکان از این ۱۷ مکان قرار دهیم. حال در ۲ مکان اول از ۵ مکان باقی‌مانده باید s، در مکان سوم ns و در مکان‌های چهارم و پنجم باید n قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۷}{۱۲} \times \frac{۱۲!}{۵!۲!}$$

د) ۱۸ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. حروف غیر از n و e را به $\binom{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!}$ طریق می‌توانیم در ۱۰ مکان از این ۱۸ مکان قرار دهیم. چون تعداد کلمات ۸ حرفی با ۵ حرف e و ۳ حرف n که هیچ دو حرف n مجاور نیستند برابر $\binom{٦}{۳}$ است، لذا حروف n و e را به $\binom{٦}{۳}$ طریق می‌توانیم در ۸ مکان باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \binom{٦}{۳}$$

ه) به سادگی می‌توان دید که فقط ۴ کلمهٔ ۸ حرفی با ۵ حرف e و ۳ حرف n وجود دارد که بین هر دو حرف n حداقل دو حرف e قرار داشته باشد. پس مشابه روش قسمت قبل نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!} \times ۴$$

و) ۱۷ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. همهٔ حروف غیر از ۵ حرف e را به $\binom{۱۷}{۱۳} \times \frac{۱۳!}{۳!۳!۲!}$ طریق می‌توانیم در ۱۳ مکان از ۱۷ مکان قرار دهیم. حال ۵ حرف e را به صورت منحصربفرد می‌توانیم در چهار مکان باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۷}{۱۳} \times \frac{۱۳!}{۳!۳!۲!}$$

ز) برای شمارش تعداد کلمات ۸ حرفی با ۵ حرف e و ۳ حرف n که بین دومین و سومین e حرف n قرار نداشته باشد ۷ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به

$\binom{۷}{۳}$ طریق می‌توانیم ۳ حرف n را قرار دهیم و سپس حروف e به طوریکتا در مکان‌های باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس تعداد این کلمات برابر $\binom{۷}{۳}$ است. حال ۱۸ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به $\frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \binom{۱۸}{۱۰}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از حروف n و e را قرار دهیم و سپس به $\binom{۷}{۳}$ طریق می‌توانیم حروف n و e را در مکان‌های باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \binom{۷}{۳}$$

ح) ۱۷ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به $\frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \binom{۱۷}{۱۰}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از n و e را قرار دهیم. حال در چهارمین مکان از ۷ باقی‌مانده باید یک n و یک e قرار دهیم و در ۳ مکان اول یک n و دو e و در ۳ مکان آخر نیز یک n و دو e قرار دهیم که به ۳ × ۳ × ۲ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۷}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!} \times ۲ \times ۳ \times ۳$$

ط) ۱۸ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به $\frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \binom{۱۸}{۱۰}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از n و e را قرار دهیم. حال در ۳ مکان آخر از ۸ مکان باقی‌مانده باید حرف e قرار دهیم و به $\frac{۵!}{۳!۲!}$ طریق می‌توانیم ۳ حرف n و ۲ حرف e را در ۵ مکان اول قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \frac{۵!}{۳!۲!}$$

ی) ابتدا تعداد کلمات ۸ حرفی با ۵ حرف e و ۳ حرف n را که در آن‌ها دومین حرف n قبل از سومین حرف e قرار دارد محاسبه می‌کنیم. اگر هر سه حرف n قبل از سومین حرف e قرار داشته باشند، سه حرف آخر کلمه باید e باشد و لذا تعداد این کلمات برابر $\frac{۵!}{۳!۲!}$ است و اگر آخرین حرف n بعد از سومین حرف e باشد، آنگاه چهار حرف اول کلمه شامل ۲ حرف n و ۲ حرف e است و حرف پنجم کلمه e می‌باشد، پس تعداد این کلمات برابر $\frac{۳!}{۲!} \times \frac{۴!}{۲!۲!}$ است. حال نتیجه می‌گیریم تعداد جایگشت‌های مورد نظر

برابر است با

$$\binom{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!} \times \frac{۴!}{۲!۲!} \times \frac{۳!}{۲!}$$

۱۰) الف) ۷ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به $\binom{۷}{۲}۲!$ طریق می‌توانیم حروف r و l را در دو مکان قرار دهیم. اولین جای خالی باقی‌مانده باید به n اختصاص یابد و چهار مکان باقی‌مانده را به $\frac{۴!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم با دو حرف n و دو حرف t پر کنیم. حال به $\binom{۸}{۶} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم ۶ حرف صدادار را در ۶ فضای خالی بین حروف بی‌صدا قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۷}{۲} \times ۲! \times \frac{۴!}{۲!۲!} \times \binom{۸}{۶} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

ب) فرض کنید x نشان‌دهندهٔ حرف صدادار و y نشان‌دهندهٔ حرف بی‌صدا (غیر از t) باشد. سه حرف اول جایگشت به یکی از صورت‌های زیر است:

$$yyt, \quad xyt, \quad yxt$$

برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌هایی که سه حرف اول آن‌ها به فرم xyt است ابتدا پنج مکان در سمت راست t در نظر می‌گیریم و در یکی از این ۵ مکان، دیگر حرف t را قرار می‌دهیم. سپس بقیهٔ حروف بی‌صدا را در ۴ مکان باقی‌مانده و مکان دوم کلمه قرار می‌دهیم. این کار را به $\frac{۵!}{۳!}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. حال در ۵ فضای خالی از ۶ فضای خالی بین حروف بی‌صدا که در سمت راست اولین حرف t قرار دارند باید حرف صدادار قرار دهیم. نتیجه می‌گیریم تعداد جایگشت‌هایی که سه حرف اول آن‌ها به فرم xyt است برابر $\frac{۶!}{۲!۲!} \times \binom{۶}{۵} \times \frac{۵!}{۳!} \times \binom{۵}{۱}$ است. با استدلال مشابه نتیجه می‌گیریم تعداد جایگشت‌هایی که سه حرف اول آن‌ها به فرم yxt و yyt است به ترتیب برابر $\frac{۶!}{۲!۲!} \times \binom{۶}{۵} \times \frac{۵!}{۳!} \times \binom{۵}{۱}$ و صفر است. پس پاسخ برابر است با

$$۲ \times \binom{۵}{۱} \times \frac{۵!}{۳!} \times \binom{۶}{۵} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

ج) ۱۳ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم و در مکان‌های سوم و پنجم به ترتیب t و n قرار می‌دهیم. در دو مکان از هشت مکان آخر باید n قرار دهیم، به $\binom{۸}{۲}$ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. ۷ مکان از بین مکان‌های چهارم تا سیزدهم خالی مانده که در یکی از آن‌ها باید t قرار دهیم و در نهایت بقیهٔ حروف را در مکان‌های باقی‌مانده می‌گذاریم. لذا پاسخ برابر است با

$$\binom{۸}{۲} \times ۷ \times \frac{۸!}{۲!۲!}$$

د) ۱۳ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم و در مکان‌های سوم و پنجم به ترتیب t و n قرار می‌دهیم. اگر دومین حرف t در مکان چهارم باشد برای دو حرف n، ۸×۲ و اگر دومین حرف t در یکی از مکان‌های ششم تا سیزدهم باشد برای دو حرف n، ۷×۳ انتخاب وجود دارد. بقیهٔ حروف را نیز به $\frac{۸!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم در مکان‌های باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$(۲ \times ۸ + ۸ \times ۳ \times ۷) \times \frac{۸!}{۲!۲!}$$

۱۱) الف) $\binom{۵}{۱}\binom{۸}{۲} \times \frac{۱۰!}{۳!۲!}$

ب) دو حالت در نظر بگیرید. یکی این که در مکان هفتم حرف i قرار داشته باشد و دیگر این که در این مکان حرفی غیر از i قرار داشته باشد. نتیجه بگیرید پاسخ برابر است با

$$\binom{۵}{۱}\binom{٦}{۱}\binom{۴}{۲} \times \frac{۷!}{۲!} + \binom{۵}{۱}\binom{٦}{۲}\binom{۵}{۲} \times \frac{۷!}{۲!}$$

ج) ۱۴ مکان در یک ردیف در نظر بگیرید. حرف ششم، دو حرف از پنج حرف اول و سه حرف از هشت حرف آخر باید صدادار باشند. پس به $\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۳} \times \frac{٦!}{۴!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را در مکان‌های مورد نظر قرار دهیم و سپس به $\frac{۸!}{۳!۲!}$ طریق می‌توانیم

حروف بی‌صدا را در بقیهٔ مکان‌ها قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۳} \times \frac{۶!}{۴!} \times \frac{۸!}{۳!۲!}$$

د) به جای حروف صدادار x و به جای حروف بی‌صدا y قرار می‌دهیم. می‌خواهیم حرف ششم x باشد، از پنج حرف اول ۲ تا x و ۳ تا y و از هشت حرف آخر ۳ تا x و ۵ تا y باشد و در ضمن هیچ دو حرف x مجاور نباشند. به $\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۲}$ طریق می‌توانیم حروف x و y را با این ویژگی در یک ردیف قرار دهیم. حال به $\frac{۶!}{۴!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای حروف x و به $\frac{۸!}{۳!۲!}$ طریق می‌توانیم حروف بی‌صدا را به جای حروف y قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۳} \times \frac{۶!}{۴!} \times \frac{۸!}{۳!۲!}$$

۱۲) الف) $\frac{۱۱!}{۲!۲!۲!}$

ب) $\binom{۸}{۵} \times ۵! + \binom{۳}{۱}\binom{۷}{۳} \times \frac{۵!}{۲!} + \binom{۳}{۲}\binom{۶}{۱} \times \frac{۵!}{۲!۲!}$

۱۳) تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی که یک حرف ۴ بار و یک حرف یک بار ظاهر شده باشد برابر $\frac{۵!}{۴!} \times ۳ \times ۲$ است (۲ انتخاب برای حرفی که ۴ بار تکرار می‌شود و ۳ انتخاب برای حرف دیگر وجود دارد). تعداد جایگشت‌هایی که یک حرف ۳ بار و یک حرف دو بار ظاهر شده باشد برابر $\frac{۵!}{۳!۲!} \times ۲ \times ۲$ است. به طور مشابه بقیه حالات را در نظر می‌گیریم و نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$۲ \times ۳ \times \frac{۵!}{۴!} + ۲ \times ۲ \times \frac{۵!}{۳!۲!} + ۲ \times \binom{۳}{۲} \times \frac{۵!}{۳!} + \binom{۳}{۲} \times ۲ \times \frac{۵!}{۲!۲!} + ۳ \times \frac{۵!}{۲!}$$

۱۴) الف) به جای حروف صدادار x و به جای حروف بی‌صدا y در نظر می‌گیریم. دو حالت وجود دارد. یک حالت این که در جایگشت ۱۰ حرفی ۳ تا x و ۷ تا y وجود داشته باشند و حالت دیگر این که ۴ تا x و ۶ تا y وجود داشته باشند. در حالت اول $\binom{۸}{۳}$

و در حالت دوم $\binom{۷}{۴}$ جایگشت وجود دارد. در هر حالت به $\frac{۷!}{۲!۲!}$ طریق می‌توانیم حروف بی‌صدا را به جای حروف y و به $\frac{۴!}{۲!}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار را به جای حروف x قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\left(\binom{۸}{۳}+\binom{۷}{۴}\right)\times\frac{۷!}{۲!۲!}\times\frac{۴!}{۲!}$$

ب) مشابه قسمت قبل دو حالت در نظر می‌گیریم. در حالتی که ۳ حرف x و ۷ حرف y وجود دارد ۸ و در حالتی که ۴ حرف x و ٦ حرف y وجود دارد ۷ جایگشت داریم. پس پاسخ برابر است با

$$(۸+۷)\times\frac{۷!}{۲!۲!}\times\frac{۴!}{۲!}$$

۱۵) به $\frac{۷!}{۴!۲!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از s را در یک ردیف قرار دهیم. سپس به $\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}$ طریق می‌توانیم دو حرف s را در سمت چپ دو حرف i و یک حرف s را در سمت چپ یک حرف p قرار دهیم. حال برای دیگر حرف s، ۵ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۷!}{۴!۲!}\times\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\times ۵$$

۱٦) الف) به $\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از n را در یک ردیف قرار دهیم. از ۱۱ فضای خالی ایجاد شده ۲ تا سمت چپ t و ۲ تا سمت چپ a قرار دارند. حال تعداد راه‌های قرار دادن ۳ حرف n برابر است با

$$\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۲}+\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۹}{۱}$$

($\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۱}$ برابر تعداد راه‌های قرار دادن ۲ حرف n در سمت چپ دو حرف t و یک حرف n در سمت چپ یک حرف a است و $\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۹}{۱}$ برابر تعداد راه‌های قرار دادن یک حرف n در سمت چپ یک حرف t، یک حرف n در سمت چپ یک حرف a و یک حرف n در فضایی خالی سمت چپ حرفی غیر از t و a است). پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱۰!}{۲!۲!۲!}\times\left(\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۲}+\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۹}{۱}\right)$$

ب) تعداد جایگشت‌های دو بستهٔ nt و ta به همراه بقیهٔ حروف برابر $\frac{۱۱!}{۲!۲!}$ است. همچنین تعداد جایگشت‌هایی که عبارت nta دارند برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۲!۲!} - \frac{۹!}{۲!۲!}$$

($\frac{۱۱!}{۲!۲!}$ برابر تعداد جایگشت‌های عبارت nta به همراه بقیهٔ حروف و $\frac{۹!}{۲!۲!}$ برابر تعداد جایگشت‌هایی است که عبارت nta در آن‌ها دوبار تکرار شده است.) پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۲!۲!} + \frac{۱۱!}{۲!۲!} - \frac{۹!}{۲!۲!}$$

۱۷) الف) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از i که در آن‌ها اولین حرف t قبل از اولین حرف n آمده است برابر $\binom{۱۰}{۵}۵! \times ۳ \times \frac{۴!}{۲!۲!}$ است. حال به $\binom{۳}{۲} \times ۱۰$ طریق می‌توانیم ۳ حرف i را در فضاهای خالی قرار دهیم به‌طوری‌که دقیقاً دو عبارت ti به‌وجود آید. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۰}{۵}۵! \times ۳ \times \frac{۴!}{۲!۲!} \times \binom{۳}{۲} \times ۱۰$$

ب) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از n برابر $\frac{۱۱!}{۳!۳!}$ است. حال از ۱۲ فضای خالی بین این حروف می‌توانیم در ٦ فضا حروف n را قرار دهیم. بسته به این که دو حرف n را در یک یا دوتا از این فضاهای خالی قرار دهیم، $\binom{٦}{۱} + \binom{٦}{۲}$ انتخاب برای حرف n وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۳!۳!} \times \left(\binom{٦}{۱} + \binom{٦}{۲}\right)$$

ج) عبارت $inini$ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید که به ۲۰ طریق می‌توان ۳ حرف t را در فضاهای خالی بین حروف این عبارت قرار داد به‌طوری‌که بین هر دو حرف i حداقل یک حرف t قرار گیرد. حال ۱۳ مکان در یک ردیف در نظر بگیرید. برای حروف غیر از i، n و t، $\binom{۱۳}{۵}۵!$ و برای حروف i، n و t، ۲۰ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر $\binom{۱۳}{۵}۵! \times ۲۰$ است.

۱۸) الف) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از m و n برابر $\frac{۶!}{۲!۲!}$ است. حال حروف m و n را به

$$\binom{۷}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} + \binom{۶}{۱}\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۱} + \binom{۶}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۲} + \binom{۲}{۲}\binom{۲}{۲} = ۱۹۳$$

طریق می‌توانیم در فضاهای خالی بین ۶ حرف دیگر قرار دهیم (جملهٔ اول عبارت فوق برابر تعداد حالاتی است که هر یک از ma و ne دوبار تکرار شوند، جملات دوم و سوم برابر تعداد حالاتی است که یکی از ma و ne دو بار و دیگری یک بار تکرار شود و جملهٔ آخر برابر تعداد حالاتی است که هر یک از ma و ne یک بار تکرار شوند). پس پاسخ برابر $۱۹۳ \times \frac{۶!}{۲!۲!}$ است.

ب) به $\binom{۸}{۴} \times \frac{۴!}{۲!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از m را در یک ردیف قرار دهیم به‌طوری‌که حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار گیرند. حال دو حرف m را به

$$\binom{۸}{۱}\binom{۲}{۱} + \binom{۲}{۲} = ۱۷$$

طریق می‌توانیم در فضاهای خالی قرار دهیم به‌طوری‌که حداقل یک عبارت ma تولید شود. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۸}{۴} \times \frac{۴!}{۲!} \times ۱۷$$

ج) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از a که اولین m قبل از اولین n آمده باشد برابر $\frac{۳!}{۲!} \times ۲ \times \frac{۴!}{۲!} \times \binom{۸}{۴}$ است. حال برای a، $\binom{۸}{۱}\binom{۲}{۱} + \binom{۲}{۲}$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۸}{۴} \times \frac{۴!}{۲!} \times ۲ \times \frac{۳!}{۲!} \times ۱۷$$

د) تعداد جایگشت‌های حروف غیر از m برابر $\frac{۸!}{۲!۲!۲!}$ است که در $\frac{۷!}{۲!۲!}$ جایگشت عبارت gn وجود دارد. حال اگر در یک جایگشت عبارت gn وجود نداشته باشد برای دو حرف m، $\binom{۸}{۲} + \binom{۸}{۱}$، و اگر عبارت gn وجود داشته باشد برای دو حرف m، ۸

انتخاب وجود دارد زیرا حداقل یکی از دو حرف m باید بین g و n قرار گیرند. پس پاسخ برابر است با

$$(\frac{۸!}{۲!۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!۲!})(\binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲}) + \frac{۷!}{۲!۲!} \times ۸$$

بخش ۴—۲

۱) الف) $\binom{۱۵}{۱۰}\binom{۱۲}{۵}$

ب) $\binom{۹}{۴}\binom{۹}{۶}\binom{۹}{۵}$

ج) $\binom{۱۱}{۱۰}\binom{۱۶}{۵} - \binom{۱۱}{۶}\binom{۱۶}{۹} - \binom{۲۷}{۱۵}$

د) تعداد مسیرهایی که شامل نقطهٔ $(۶,۴)$ هستند ولی نقطهٔ $(۱۲,۹)$ را ندارند برابر $\left(\binom{۶}{۳}\binom{۱۱}{۶} - \binom{۱۷}{۹}\right)\binom{۱۰}{۶}$ و تعداد مسیرهایی که شامل نقطهٔ $(۱۲,۹)$ هستند ولی نقطهٔ $(۶,۴)$ را ندارند برابر $\binom{۶}{۳}\left(\binom{۱۱}{۶}\binom{۱۰}{۶} - \binom{۲۱}{۱۲}\right)$ است. لذا پاسخ برابر مجموع این دو عدد می‌باشد.

۲) الف) چنان‌چه حرکت اول را با D و حرکت دوم را با U نشان دهیم برای رفتن به نقطهٔ $(۲۰,۴)$ باید ۸ حرکت از نوع D و ۱۲ حرکت از نوع U انجام دهیم. لذا پاسخ برابر $\binom{۲۰}{۸}$ است.

ب) $\binom{۱۱}{۳}\binom{۹}{۵}$

۳) الف) چنان‌چه چهار حرکت داده شده را به ترتیب با R، U، L و D نشان دهیم، برای رفتن به نقطهٔ $(۱۰,۱۰)$ با ۲۰ حرکت باید ۱۰ حرکت R و ۱۰ حرکت U انجام دهیم. لذا پاسخ برابر $\binom{۲۰}{۱۰}$ است.

ب) دو حالت وجود دارد. یکی این که ۱۱ حرکت R، یک حرکت L و ۱۰ حرکت U انجام دهیم و دیگر این که ۱۰ حرکت R، ۱۱ حرکت U و یک حرکت D انجام دهیم. پس پاسخ برابر $۲ \times \frac{۲۲!}{۱۱!۱۰!}$ است.

ج) همانند قسمت قبل دو حالت در نظر می‌گیریم. در حالتی که یک حرکت L وجود داشته باشد این حرکت با هیچ حرکت R نباید مجاور باشد. اگر اولین حرکت L باشد، در این صورت دومین حرکت U است و برای بقیهٔ حرکت‌ها $\binom{۲۰}{۱۱}$ انتخاب داریم. به طور مشابه در $\binom{۲۰}{۱۱}$ مسیر آخرین حرکت L است. حال اگر هیچ یک از حرکت‌های اول و آخر L نباشد، تعداد مسیرها برابر تعداد جایگشت‌های عبارت ULU به همراه بقیهٔ حروف یعنی برابر $\frac{۲۰!}{۱۱!۸!}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$۲ \times \left(۲\binom{۲۰}{۱۱} + \frac{۲۰!}{۱۱!۸!}\right)$$

د) علاوه بر ۱۰ حرکت R و ۱۰ حرکت U یا باید دو حرکت R و دو حرکت L انجام دهیم، یا دو حرکت U و دو حرکت D و یا هر یک از چهار حرکت را یک بار انجام دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۲۴!}{۱۲!۱۰!۲!} + \frac{۲۴!}{۱۲!۱۰!۲!} + \frac{۲۴!}{۱۱!۱۱!}$$

۴) الف) همانند مسأله قبل چهار حرکت را به ترتیب با R، U، L و D نشان می‌دهیم. علاوه بر ۸ حرکت R و ۸ حرکت U یا باید یک حرکت R و یک حرکت L انجام دهیم و یا باید یک حرکت U و یک حرکت D انجام دهیم. برای شمارش مسیرها در حالت اول ۱۸ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. برای ۸ حرکت U، $\binom{۱۸}{۸}$ انتخاب وجود دارد. چون نباید از صفحهٔ شطرنجی خارج شویم، لذا اولین و آخرین مکان از ۱۰ مکان خالی باید به حرکت R اختصاص یابد و لذا برای حرکت L، ۸ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر $۲ \times ۸ \times \binom{۱۸}{۸}$ است.

ب) در حالتی که ۹ حرکت R، ۸ حرکت U و یک حرکت L باید انجام دهیم تعداد مسیرها برابر تعداد جایگشت‌های عبارت ULU به همراه بقیهٔ حروف است به‌طوری‌که قبل و بعد از این عبارت حداقل یک حرف R وجود داشته باشد. برای شمارش این مسیرها ۱۶ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. برای ۹ حرف R و عبارت ULU، ۱۰

مکان را انتخاب می‌کنیم و عبارت ULU را در یکی از این ۱۰ مکان غیر از مکان اول و آخر قرار می‌دهیم. پس پاسخ برابر $۲ \times ۸ \times \binom{۱۶}{۱۰}$ است.

ج) علاوه بر ۸ حرکت R و ۸ حرکت U یا باید دو R و دو L انجام دهیم یا دو U و دو D و یا هر یک از چهار حرکت را یک بار انجام دهیم. برای شمارش تعداد مسیرها در حالتی که ۱۰ حرکت R، ۸ حرکت U و ۲ حرکت L داریم، ۲۰ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. برای حروف U، $\binom{۲۰}{۸}$ انتخاب وجود دارد. از ۱۲ مکان خالی باقی‌مانده، مکان‌های اول و آخر باید به R اختصاص یابند. پس برای دو حرف L، $\binom{۱۰}{۲}$ انتخاب وجود دارد که البته دو حالت از این $\binom{۱۰}{۲}$ حالت نیز نامطلوبند، یکی این که دو حرف L در مکان‌های دوم و سوم قرار گیرند و دیگر این که دو حرف L در مکان‌های دهم و یازدهم قرار گیرند، زیرا در این دو حالت متحرک از صفحهٔ شطرنجی خارج می‌شود. پس تعداد مسیرها در این حالت برابر $(\binom{۱۰}{۲} - ۲)\binom{۲۰}{۸}$ است. به روش مشابه تعداد مسیرها را در دو حالت دیگر محاسبه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$۲\binom{۲۰}{۸}\left(\binom{۱۰}{۲} - ۲\right) + \binom{۲۰}{۱۰} \times ۸ \times ۸$$

۵) الف) $۹^۸$

ب) راه‌حل این قسمت مشابه راه‌حل مسألهٔ ۴ ـ ب است. پاسخ برابر $۸ \times \binom{۱۶}{۱۰}$ است.

۶) الف) چنان‌چه حرکت‌های داده شده را به ترتیب با A، B و C نشان دهیم، در این صورت برای رفتن به نقطهٔ $(۸, ۱۰, ۱۲)$ باید ۸ حرکت A، ۱۰ حرکت B و ۱۲ حرکت C انجام دهیم. پس پاسخ برابر $\frac{۳۰!}{۸!۱۰!۱۲!}$ است.

ب) $\frac{۱۳!}{۳!۶!۴!} \times \frac{۱۷!}{۵!۴!۸!}$

۷) الف) چنان‌چه حرکت‌های داده شده را به ترتیب با A، B و C نشان دهیم، در این صورت برای رفتن به نقطهٔ $(۱۰, -۷, ۵)$ باید ۱۰ حرکت A، ۸ حرکت B و ۳

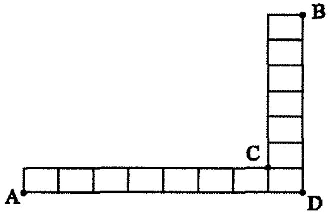
حرکت C انجام دهیم. پس پاسخ برابر $\frac{۲۱!}{۱۰!۸!۳!}$ است.

ب) $\frac{۱۵!}{۷!۶!۲!} \times \frac{۶!}{۳!۲!}$

۸) $\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۳}\binom{۶}{۳} + \binom{۶}{۴}\binom{۶}{۲}$

۹) مشابه روش به‌کار رفته در مسأله ۶.۲.۴ عمل کنید. پاسخ برابر ۴۸۶ است.

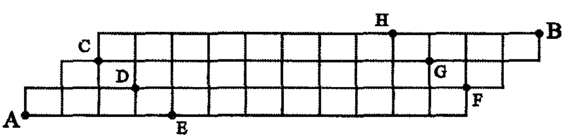
۱۰) تعداد مسیرهایی که از نقطهٔ D نمی‌گذرند برابر $۲^۶ \times ۲^۷$ است (از A به C، $۲^۷$ مسیر وجود دارد، زیرا از ۸ پاره‌خط عمودی باید تعداد فردی را انتخاب کنیم و به طور مشابه از C به B، $۲^۶$ مسیر وجود دارد).



به طور مشابه تعداد مسیرهایی که از D می‌گذرند ولی از C نمی‌گذرند برابر $۲^۵ \times ۲^۶$ است. تعداد مسیرهایی که ابتدا از C و سپس از D می‌گذرند برابر $۲^۵ \times ۲^۶$ و تعداد مسیرهایی که ابتدا از D و سپس از C می‌گذرند برابر $۲^۵ \times ۲^۶$ است. پس پاسخ برابر است با

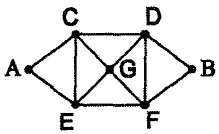
$$۲^{۱۳} + ۲^{۱۱} + ۲^{۱۱} + ۲^{۱۱} = ۷ \times ۲^{۱۱}$$

۱۱) هر مسیر از A به B دقیقاً از یکی از سه نقطهٔ C، D و E و دقیقاً از یکی از سه نقطهٔ F، G و H می‌گذرد.



تعداد مسیرهای $AEFB$، $AEGB$، $AEHB$، $ADFB$، $ADGB$، $ADHB$، $ACGB$ و $ACHB$ به ترتیب برابر ۴۵، ۱۴۴، $\binom{۹}{۳}$، ۲۰، ۱۴۴، ۱۴۴، ۲۰ و ۴۵ است و لذا پاسخ برابر مجموع این اعداد است.

۱۲) تعداد مسیرهایی که از هیچ یک از پاره‌خط‌های CD و EF نمی‌گذرند برابر ۱۶ است، توجه کنید که همهٔ این مسیرها از نقطهٔ G می‌گذرند. تعداد مسیرهایی که از نقطه G نمی‌گذرند برابر ۸ است. تعداد مسیرهایی که از نقطهٔ G و پاره‌خط CD می‌گذرند ولی از پاره‌خط EF نمی‌گذرند برابر ۴ است و به طور مشابه ۴ مسیر از G و EF می‌گذرند که از CD عبور نمی‌کنند.



در نهایت تعداد مسیرهایی که هم از G و هم از CD و EF می‌گذرند برابر ۲ است. پس پاسخ برابر ۳۴ است.

۱۳) تعداد مسیرها از A به هر خانه مانند B برابر مجموع تعداد مسیرها از A به خانه‌های ردیف پایین خانهٔ B که با B حداقل یک رأس مشترک دارند می‌باشد.

۵۰	۷۰	۴۹
۲۱	۲۹	۲۰
۹	۱۲	۸
۴	۵	۳
۲	۲	۱
۱	۱	۰
A		

پس پاسخ برابر است با

$$۵۰ + ۷۰ + ۴۹ = ۱۶۹$$

۱۴) مشابه روش به‌کار رفته در حل مسألهٔ ۶.۲.۴ عمل کنید. پاسخ برابر ۵۸ است.

۱۵) تناظری یک‌به‌یک بین مسیرهایی که تعداد زوجی علامت منفی و تعداد فردی علامت منفی دارند وجود دارد. به این صورت که یک مسیر مانند P در نظر می‌گیریم که تعداد زوجی علامت منفی داشته باشد. C را اولین نقطهٔ برخورد این مسیر با پاره‌خط AB می‌گیریم (ممکن است که $C = B$). قسمت اول مسیر از A تا C را نسبت به پاره‌خط AB قرینه می‌کنیم و آن را با قسمت دوم مسیر از B تا C در نظر می‌گیریم. نام این مسیر را Q می‌گذاریم. چون از A تا C تعداد فردی علامت وجود دارد و علامت نقطه‌هایی که نسبت به پاره‌خط AB قرینه‌اند متفاوت است، لذا Q تعداد فردی علامت منفی دارد. نتیجه می‌گیریم تعداد مسیرهایی که تعداد زوجی علامت منفی دارند برابر $\frac{۱}{۲}\binom{۸}{۴}$ است.

۱۶) روی هر سنگ تعداد مسیرها از سنگ شمارهٔ ۱ تا این سنگ را می‌نویسیم. عدد روی سنگ شمارهٔ i برابر مجموع اعداد سنگ‌هایی است که با یک حرکت از آن‌ها می‌توان به روی سنگ شمارهٔ i پرید. مثلاً عدد روی سنگ شمارهٔ ۸ برابر مجموع اعداد روی سنگ‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ است.

$$\frac{۱}{۱} \quad \frac{۱}{۲} \quad \frac{۱}{۳} \quad \frac{۲}{۴} \quad \frac{۳}{۵} \quad \frac{۶}{۶} \quad \frac{۱۱}{۷} \quad \frac{۲۲}{۸} \quad \frac{۴۲}{۹} \quad \frac{۸۴}{۱۰}$$

پس پاسخ برابر ۸۴ است.

بخش ۴–۳

۱) $\frac{۷!}{۲!۳!}$

۲) $\frac{۶!}{۳!۲!} \times ۲^۳ \times (-۳) \times ۵^۲$

۳) جملهٔ عمومی بسط $(۱ + x^۲ - x^۳)^۷$ به صورت

$$\frac{۷!}{a!b!c!}(x^۲)^b(-x^۳)^c = \frac{(-۱)^c ۷!}{a!b!c!}x^{۲b+۳c}$$

است که در آن $a + b + c = ۷$. چنان چه (a, b, c) برابر $(۳, ۰, ۴)$ یا $(۱, ۳, ۳)$ باشد جملهٔ $x^۹$ تولید می‌شود. پس ضریب $x^۹$ برابر $\frac{۷!}{۳!۳!} - \frac{۷!}{۴!۳!}$ است.

۴) مشابه مسألهٔ قبل عمل کنید. ضریب $x^{۱۷}$ برابر صفر، ضریب $x^{۱۸}$ برابر $\frac{۲۰!}{۱۷!۲!}$ و ضریب $x^{۱۹}$ برابر $\frac{۲۰!}{۱۶!۳!}$ است.

۵) الف) جملهٔ عمومی بسط $(۱+x+x^۲)^n$ به صورت $\frac{n!}{a!b!c!}x^{b+۲c}$ است که $a+b+c=n$. اگر سه‌تایی (p, q, r) جملهٔ x^{n+k} تولید کند، در این صورت سه‌تایی (r, q, p) جملهٔ x^{n-k} تولید می‌کند زیرا

$$q + ۲p = ۲(p + q + r) - (q + ۲r) = ۲n - (n + k) = n - k$$

در ضمن ضریب جملهٔ متناظر با سه‌تایی (p, q, r) با ضریب جملهٔ سه‌تایی متناظر با (r, q, p) برابر است و لذا $a_{n+k} = a_{n-k}$.

ب) با توجه به قسمت (الف)

$$a_۰ = a_{۲n}, \quad a_۱ = a_{۲n-۱}, \quad a_۲ = a_{۲n-۲}, \quad \ldots \quad , \quad a_{n-۱} = a_{n+۱}$$

و لذا در عبارت داده شده جملات دوتا دوتا قرینهٔ یکدیگرند.

ج) با توجه به راه‌حل قسمت (الف)، a_k برابر مجموع اعداد به صورت $\frac{n!}{a!b!c!}$ است که در آن $a+b+c=n$ و $b+۲c=k$. حال اگر b_k را ضریب x^k در بسط $(۱-x+x^۲)^n$ بگیریم، در این صورت b_k برابر مجموع اعداد به صورت $\frac{(-۱)^b n!}{a!b!c!}$ است که در آن $a+b+c=n$ و $b+۲c=k$. پس اگر k زوج باشد، b نیز زوج است و $b_k = a_k$ و

اگر k فرد باشد، b نیز فرد است و $b_k = -a_k$. همچنین چون a_k ضریب x^k در بسط $(1+x+x^2)^n$ است، پس ضریب x^{2k} در بسط $(1+x^2+x^4)^n$ برابر a_k است. حال تساوی

$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n = (1+x^2+x^4)^n$$

را در نظر بگیرید. ضریب x^{2n} در سمت راست برابر a_n و در سمت چپ برابر

$$a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + a_2 b_{2n-2} + \cdots + a_{2n} b_0$$

است. با توجه به این که

$$b_{2n} = a_{2n} = a_0, \quad b_{2n-1} = -a_{2n-1} = -a_1, \quad b_{2n-2} = a_{2n-2} = a_2, \quad \ldots$$

نتیجه می‌گیریم عبارت فوق برابر است با

$$a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \cdots + a_{2n}^2 = 2(a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2) + (-1)^n a_n^2$$

چنان چه عبارت اخیر را برابر a_n قرار دهیم حکم ثابت می‌شود.

د) تساوی

$$(1+x+x^2)^n(1-x)^n = (1-x^3)^n$$

را در نظر بگیرید. ضریب x^r در سمت چپ این تساوی برابر است با

$$\binom{n}{0}a_r - \binom{n}{1}a_{r-1} + \binom{n}{2}a_{r-2} - \cdots + (-1)^r\binom{n}{r}a_0$$

و ضریب x^r در سمت راست تساوی وقتی r مضرب ۳ نیست برابر صفر و وقتی $r = 3s$ برابر $(-1)^s\binom{n}{s}$ است.

۶) ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ را در طرفین تساوی داده شده حساب کنید و با هم برابر قرار دهید.

۷) الف) نابرابری داده شده با نابرابری

$$\frac{n_1!n_2!}{(n_1-1)!(n_2+1)!} > 1$$

معادل است و این نابرابری نیز با نابرابری $\frac{n_1}{n_2+1} > 1$ معادل است که با توجه به فرض این نابرابری درست می‌باشد.

با توجه به نابرابری داده شده نتیجه می‌گیریم ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$ در صورتی حداکثر مقدار ممکن را دارد که هر دوتا از n_i ها حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشند.

ب) با توجه به نکتهٔ اخیر، بزرگترین ضریب مربوط به جملهٔ $x_1^4x_2^4x_3^4$ است که ضریب آن برابر $\frac{12!}{4!4!4!}$ است.

ج) بزرگترین ضریب مربوط جملهٔ $x_1^5x_2^5x_3^4$ است که ضریب آن برابر $\frac{14!}{5!5!4!}$ است.

د) بزرگترین ضریب مربوط به جملهٔ $x_1^4x_2^4x_3^3x_4^3$ است که ضریب آن برابر $\frac{14!}{4!4!3!3!}$ است.

فصل ۵

بخش ۵–۲

۱) الف) $\binom{19}{3}$

ب) $\binom{23}{3}$

ج) $\binom{14}{3}$

۲) $\binom{14}{3}\binom{9}{2}$

۳) الف) فرض کنید $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ یک عدد چهاررقمی باشد. پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 0$، $x_3 \geq 0$ و $x_4 \geq 0$ یعنی برابر $\binom{11}{3}$ است.

ب) تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با

شرایط $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 0$، $x_3 \geq 0$ و $x_4 \geq 0$ برابر $\binom{12}{3}$ است که در بین این جواب‌ها، $(10, 0, 0, 0)$ برای ما مطلوب نیست. لذا پاسخ برابر $\binom{12}{3} - 1$ است.

ج) تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 0$، $x_3 \geq 0$ و $x_4 \geq 0$ برابر $\binom{13}{3}$ است که در بین این جواب‌ها، $(11, 0, 0, 0)$، $(10, 1, 0, 0)$، $(10, 0, 1, 0)$، $(10, 0, 0, 1)$، $(1, 10, 0, 0)$، $(1, 0, 10, 0)$ و $(1, 0, 0, 10)$ برای ما مطلوب نیستند. لذا پاسخ برابر $\binom{13}{3} - 7$ است.

۴) الف) $\binom{14}{2}4$

ب) $\binom{19}{2}\binom{14}{2}4$

ج) $\binom{11}{2}\binom{19}{2}\binom{14}{2}4$

۵) $\binom{9}{5}\frac{7!}{4!2!}$

٦) تعداد جایگشت‌های حروف بی‌صدا برابر $\frac{7!}{3!2!}$ است. حال از ۸ مکان ایجاد شده بین این حروف در دو مکان (مکان‌های مجاور حرف r) نمی‌توانیم حرف صدادار قرار دهیم. فرض کنید در ٦ مکان دیگر به ترتیب x_1، x_2، ... و x_6 حرف صدادار قرار دهیم، در این صورت $x_1 + \cdots + x_6 = 6$. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{11}{5}$ است. به‌ازای هر جواب از این معادله، ٦ حرف صدادار را به $\frac{6!}{2!2!}$ طریق می‌توانیم در مکان‌های مشخص شده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{7!}{3!2!} \times \binom{11}{5} \times \frac{6!}{2!2!}$$

۷) فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4 به ترتیب تعداد افراد جلوی این گیشه‌ها باشد. در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{43}{3}$ است. حال به‌ازای هر جواب از این معادله افراد

به $!۴۰$ طریق می‌توانند در مکان‌های مشخص شده جلوی گیشه‌ها بایستند. پس پاسخ برابر $\binom{۴۳}{۳} \times !۴۰$ است.

۸) الف) کلمهٔ مورد نظر باید به صورت

$$a \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots b$$

باشد. فرض کنید تعداد حروف a و b در ٦ بلوک فوق به ترتیب برابر $x_۱$، $x_۲$، ...و $x_٦$ باشد، در این صورت $x_۱ + \cdots + x_٦ = ۲۰$. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر $\binom{۱۹}{۵}$ است، لذا تعداد کلمات نیز برابر این مقدار است.

ب) اگر کلمه با حرف a شروع شود به صورت

$$a \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots ba \ldots a$$

است. تعداد این کلمات برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۷ = ۲۰$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{۱۹}{٦}$ است. به طور مشابه $\binom{۱۹}{٦}$ کلمه با حرف b شروع می‌شوند. پس پاسخ برابر $۲\binom{۱۹}{٦}$ است.

ج) $\binom{۲۱}{۷}$. مسألهٔ ۳۴ از بخش ۱.۳ را ملاحظه کنید.

۹) الف) کلمهٔ مورد نظر به صورت

$$a \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots b$$

است. لذا تعداد این کلمات برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۸ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{۱۱}{۲}\binom{۷}{۲}$ است.

ب) مشابه روشی که در حل قسمت (الف) به‌کار بردیم نتیجه می‌گیریم تعداد کلماتی که

با حرف a شروع می‌شوند برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۸ \end{cases}$$

و تعداد کلماتی که با حرف b شروع می‌شوند برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۸ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی است. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۱}{۳}\binom{۷}{۲} + \binom{۱۱}{۲}\binom{۷}{۳}$$

ج) کلمهٔ مورد نظر به صورت

$$b\dots ba\dots ab\dots ba\dots ab\dots ba\dots ab\dots ba\dots a$$

است که ممکن است تعداد حروف b در ابتدای کلمه و تعداد حروف a در انتهای کلمه برابر صفر نیز باشند. پس تعداد این کلمات برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۸ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱, x_۲, x_۳, y_۲, y_۳, y_۴ \geq ۱, \quad x_۴, y_۱ \geq ۰$$

یعنی برابر $\binom{۸}{۳}\binom{۱۲}{۳}$ است.

د) می‌دانیم اگر k حرف a پشت سرهم در یک ردیف قرار داشته باشند، در این صورت $k - ۱$ عبارت aa تولید می‌کنند. حال اگر کلمه‌ای ۱۲ حرف a و ۹ عبارت aa داشته باشد، پس این ۱۲ حرف باید در سه قسمت کلمه بیایند. لذا کلمه به صورت

$$b\dots ba\dots ab\dots ba\dots ab\dots ba\dots ab\dots b$$

است که تعداد حروف b در ابتدا و انتهای کلمه می‌تواند برابر صفر هم باشد. پس پاسخ برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۸ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱, x_۲, x_۳, y_۲, y_۳ \geq ۱, \quad x_۱, x_۴ \geq ۰$$

یعنی برابر $\binom{۹}{۳}\binom{۱۱}{۲}$ است.

۱۰) الف) همانند روشی که در حل مسألهٔ ۹ ــ د به‌کار بردیم تعداد کلمات ۳۰ حرفی با ۱۲ حرف a و ۱۸ حرف x که دقیقاً ۹ تا عبارت aa دارند برابر $\binom{۱۹}{۳}\binom{۱۱}{۲}$ است. حال به $\frac{۱۸!}{۸!۱۰!}$ طریق می‌توانیم حروف b و c را به جای حروف x قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۱}{۲}\binom{۱۹}{۳} \times \frac{۱۸!}{۸!۱۰!}$$

ب) چون حروف a باید در ۳ بلوک بیایند لذا به جای حروف a، سه حرف x در نظر می‌گیریم. تعداد کلمات با ۳ حرف x و ۱۰ حرف b برابر $\frac{۱۳!}{۳!۱۰!}$ است که در $\frac{۱۱!}{۱۰!}$ کلمه حروف x مجاورند، در $۲ \times \binom{۱۱}{۲}$ کلمه فقط دو حرف x مجاورند و در $\binom{۱۱}{۳}$ کلمه هیچ دو حرف x مجاور نیستند. حال حروف c را در فضاهای خالی بین حروف b و x قرار می‌دهیم طوری که هیچ دو حرف x مجاور نباشند. در حالتی که سه حرف x مجاور باشند برای حروف c، $\binom{۱۲}{۶}$ انتخاب، در حالتی که فقط دو حرف x مجاور باشند برای حروف c، $\binom{۱۳}{۷}$ انتخاب و در حالتی که هیچ دو حرف x مجاور نباشند برای حروف c، $\binom{۱۴}{۸}$ انتخاب وجود دارد. در نهایت تعداد راه‌های قرار دادن ۱۲ حرف a به جای حروف x برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی

یعنی برابر $\binom{۱۱}{۲}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\left(\frac{۱۱!}{۱۰!}\binom{۱۲}{۶}+\binom{۱۱}{۲}\times ۲\times\binom{۱۳}{۷}+\binom{۱۱}{۳}\binom{۱۴}{۸}\right)\binom{۱۱}{۲}$$

ج) حروف a و c را به $\frac{۲۰!}{۸!۱۲!}$ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم. ۲۱ فضای خالی ایجاد می‌شود که ۱۲ تا از آن‌ها سمت راست حرف a قرار دارند. در سه‌تا از این ۱۲ فضا باید حداقل یک حرف b قرار دهیم و در ۹ فضای باقی‌مانده از ۲۱ فضا به هر تعداد که بخواهیم می‌توانیم حرف b قرار دهیم. پس ابتدا ۳ فضا از ۱۲ فضای واقع در سمت راست حروف a را انتخاب می‌کنیم. حال تعداد راه‌های قرار دادن حروف b در فضاهای مجاز برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱+\cdots+x_{۱۲}=۱۰$ با شرایط

$$x_۱,x_۲,x_۳\geq ۱,\quad x_۴,\ldots,x_{۱۲}\geq ۰$$

یعنی برابر $\binom{۱۸}{۱۱}$ است، پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۲۰!}{۸!۱۲!}\times\binom{۱۲}{۳}\binom{۱۸}{۱۱}$$

د) حروف b و c را به $\frac{۱۸!}{۸!۱۰!}$ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم. از ۱۹ فضای خالی ایجاد شده ۱۰ فضا در سمت چپ حرف b قرار دارند که باید در ۳ تا از آن‌ها حداقل یک حرف a قرار دهیم و ۸ فضا در سمت چپ حرف c قرار دارند که باید در دوتا از آن‌ها حداقل یک حرف a قرار دهیم. همچنین در فضای انتهای کلمه نیز می‌توانیم a قرار دهیم. با توجه به این که معادلهٔ $x_۱+\cdots+x_۶=۱۲$ با شرایط

$$x_۱,\ldots,x_۵\geq ۱,\quad x_۶\geq ۰$$

$\binom{۱۲}{۵}$ جواب دارد، لذا حروف a را به $\binom{۱۲}{۵}\binom{۸}{۲}\binom{۱۰}{۳}$ طریق می‌توانیم در فضاهای خالی قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{۱۸!}{۸!۱۰!}\times\binom{۱۰}{۳}\binom{۸}{۲}\binom{۱۲}{۵}$$

ه) تعداد جایگشت‌های حروف a و c که بین هر دو حرف c حداقل یک حرف a قرار داشته باشد برابر $\binom{۱۳}{۸}$ است (ابتدا حروف a را در یک ردیف قرار می‌دهیم و سپس حروف c را در فضاهای خالی قرار می‌دهیم). حال تعداد راه‌های قرار دادن حروف b در ۲۱ فضای خالی ایجاد شده برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_{۲۱} = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{۳۰}{۲۰}$ است. پس پاسخ برابر $\binom{۳۰}{۲۰}\binom{۱۳}{۸}$ است.

۱۱) مشابه روشی که در حل مسألهٔ ۵.۱.۵ به‌کار بردیم پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۶ = ۳۵$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱, x_۶ \geq ۰, \quad x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \geq ۳$$

یعنی برابر $\binom{۲۸}{۵}$ است.

۱۲) یکی از افراد را مانند A در نظر بگیرید. تعداد حالاتی که فرد A انتخاب می‌شود برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۵ = ۳۵$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_i \geq ۳$، $i = ۱, \ldots, ۵$، یعنی برابر $\binom{۲۴}{۴}$ است. پس هر فرد در $\binom{۲۴}{۴}$ حالت جزء افراد انتخاب شده است و چون تعداد افراد برابر ۴۰ است و هر بار ۵ نفر انتخاب می‌شوند، پس پاسخ برابر $\frac{۴۰\binom{۲۴}{۴}}{۵}$ است.

۱۳) سه حرف t را در یک ردیف قرار می‌دهیم. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ به ترتیب تعداد حروف قرار گرفته قبل از اولین t، بین اولین و دومین t، بین دومین و سومین t و بعد از سومین t باشند. در این صورت $x_۱ + \cdots + x_۴ = ۹$. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_۱, x_۴ \geq ۰, \quad x_۲, x_۳ \geq ۲$$

برابر $\binom{8}{3}$ است. به‌ازای هر جواب از این معادله به $\frac{9!}{2!2!2!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از t را در مکان‌های مشخص شده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{8}{3} \times \frac{9!}{2!2!2!}$$

۱۴) الف) $\binom{39}{9}$

ب) پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $n_1 + \cdots + n_{10} = 30$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$n_1, n_2, n_3 \geq 1, \quad n_4, \ldots n_{10} \geq 0$$

یعنی برابر $\binom{36}{9}$ است.

۱۵) به طور کلی تعداد جواب‌های نامعادلهٔ $x_1 + \cdots + x_k \leq n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq c_1$، $x_2 \geq c_2$، ... و $x_k \geq c_k$ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq c_1$، ...، $x_k \geq c_k$ و $x_{k+1} \geq 0$ یعنی برابر $\binom{n+k-(c_1+\cdots+c_k)}{k}$ است.

الف) $\binom{24}{4}$

ب) $\binom{20}{4}$

ج) $\binom{18}{4}$

۱۶) پاسخ برابر تعداد جواب‌های نامعادلهٔ $x_1 + \cdots + x_4 \leq 8$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$x_1 \geq 1, \quad x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

یعنی برابر $\binom{11}{4}$ است.

۱۷) به‌ازای هر k، تعداد جواب‌های دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 20 - k \end{cases}$$

برابر $\binom{20-k}{4}\binom{k-1}{2}$ است. پس پاسخ برابر $\binom{15}{4}\binom{4}{2} + \binom{16}{4}\binom{3}{2} + \binom{17}{4}\binom{2}{2}$ است.

۱۸) به‌ازای هر k معادلهٔ $x_2 + x_3 + x_4 = 9 - 2k$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی $\binom{8-2k}{2}$ جواب دارد. پس پاسخ برابر $\binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2}$ است.

۱۹) تعداد راه‌های انتخاب ۱۵ رقم برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_0 + x_1 + \cdots + x_9 = 15$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{24}{9}$ است. حال به هر صورت ۱۵ رقم را انتخاب کنیم عدد را به صورت منحصربفرد می‌توانیم تشکیل دهیم. پس پاسخ برابر $\binom{24}{9}$ است.

۲۰) پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_{26} = 12$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{37}{25}$ است.

۲۱) الف) به $\frac{10!}{2!3!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از i را در یک ردیف قرار دهیم. حال تعداد راه‌های قرار دادن سه حرف i به‌طوری‌که عبارت it تولید نشود برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_8 = 3$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{10}{7}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{10!}{2!3!} \times \binom{10}{7}$$

ب) به $\frac{10!}{3!2!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از t را در یک ردیف قرار دهیم که در $\frac{9!}{3!}$ حالت حروف n مجاورند. حال اگر دو حرف n مجاور باشند حروف t را در ۸ فضا از ۱۱ فضای خالی ایجاد شده می‌توانیم قرار دهیم و اگر دو حرف n غیر مجاور باشند حروف t را در ۷ فضا از فضاهای خالی می‌توانیم قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{9!}{3!} \times \binom{10}{7} + (\frac{10!}{3!2!} - \frac{9!}{3!}) \times \binom{9}{6}$$

ج) به $\frac{10!}{3!2!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از i را در یک ردیف قرار دهیم که در $\frac{9!}{2!}$ حالت سه حرف t مجاورند و در $2 \times \binom{8}{2} \times \frac{7!}{2!}$ حالت فقط دو حرف t مجاورند و در $\binom{8}{3} \times \frac{7!}{2!}$

حالت هیچ دو حرف t مجاور نیستند. اگر هر سه حرف t مجاور باشند، ۷ مکان، اگر فقط دو حرف t مجاور باشند، ۶ مکان و اگر هیچ دو حرف t مجاور نباشند، ۵ مکان مجاز برای حروف i وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{9!}{2!} \times \binom{9}{6} + \frac{7!}{2!} \times \binom{8}{2} \times 2 \times \binom{8}{5} + \frac{7!}{2!} \times \binom{8}{3} \times \binom{7}{4}$$

د) به $\frac{7!}{2!}$ طریق می‌توانیم حروف غیر از i و t را در یک ردیف قرار دهیم. حال از ۸ فضای خالی بین این حروف دوتا مجاور s قرار دارند، لذا ۶ فضای مجاز برای حروف i و t وجود دارد. به $\binom{11}{5}$ طریق می‌توانیم ۶ جای خالی در این ۶ فضا انتخاب کنیم و سپس به $\frac{6!}{3!3!}$ طریق می‌توانیم حروف i و t را در این ۶ جای خالی قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{7!}{2!} \times \binom{11}{5} \times \frac{6!}{3!3!}$$

ه) حروف بی‌صدا را به $\frac{7!}{3!2!}$ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم که در $\frac{6!}{3!}$ حالت دو حرف n مجاورند. اگر دو حرف n مجاور باشند، حروف صدادار را به $\frac{6!}{3!} \times \binom{10}{4}$ طریق و اگر دو حرف n مجاور نباشند حروف صدادار را به $\frac{6!}{3!} \times \binom{9}{3}$ طریق می‌توانیم در فضاهای خالی قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{6!}{3!} \times \binom{10}{4} \times \frac{6!}{3!} + \left(\frac{7!}{3!2!} - \frac{6!}{3!}\right) \times \binom{9}{3} \times \frac{6!}{3!}$$

و) ابتدا حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار می‌دهیم و مشابه قسمت (ج) سه حالت برای حروف t در نظر می‌گیریم. پاسخ برابر است با

$$\frac{5!}{2!} \times \binom{9}{3} \times \frac{6!}{3!} + \frac{4!}{2!} \times \binom{5}{2} \times 2 \times \binom{8}{2} \times \frac{6!}{3!} + \frac{4!}{2!} \times \binom{5}{3} \times \binom{7}{1} \times \frac{6!}{3!}$$

ز) تعداد جایگشت‌های ۳ حرف t و ۶ حرف x که بین هر دو حرف t حداقل دو حرف x قرار داشته باشند برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_4 = 6$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq 0$، $x_2 \geq 2$، $x_3 \geq 2$ و $x_4 \geq 0$ یعنی برابر $\binom{5}{3}$ است. پس

تعداد جایگشت‌های ۳ حروف t به همراه ٦ حرف صدادار کلمهٔ داده شده به‌طوری‌که بین هر دو حرف t حداقل دو حرف صدادار قرار داشته باشند برابر $\frac{۶!}{۳!} \times \binom{۵}{۳}$ است. حال ۱۳ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. به $\frac{۴!}{۲!} \times \binom{۱۳}{۴}$ طریق می‌توانیم حروف بی‌صدا غیر از t را در این مکان‌ها قرار دهیم و سپس به $\frac{۶!}{۳!} \times \binom{۵}{۳}$ طریق می‌توانیم حروف صدادار و ۳ حرف t را در مکان‌های باقی‌مانده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۳}{۴} \times \frac{۴!}{۲!} \times \binom{۵}{۳} \times \frac{۶!}{۳!}$$

۲۲) الف) تعداد مسیرهایی که حرکت اول آن‌ها افقی است برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۱۲ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{۱۱}{۲}\binom{۱۴}{۲}$ است. به طور مشابه تعداد مسیرهایی که حرکت اول آن‌ها عمودی باشد نیز برابر $\binom{۱۱}{۲}\binom{۱۴}{۲}$ است، پس پاسخ برابر $۲\binom{۱۴}{۲}\binom{۱۱}{۲}$ است.

ب) تعداد مسیرهایی که حرکت اول آن‌ها افقی است برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۷ = ۲۰$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{۱۹}{۶}$ است. به طور مشابه در $\binom{۱۹}{۶}$ مسیر حرکت اول عمودی است، پس پاسخ برابر $۲\binom{۱۹}{۶}$ است.

بخش ۵–۳

۱) الف) $\binom{۴۵}{۵}$

ب) $\binom{۲۷}{۵}$

ج) $\binom{۳۹}{۳}\binom{۶}{۴}$

د) $\binom{۶}{۱} + \binom{۳۹}{۱}\binom{۶}{۲} + \binom{۳۹}{۲}\binom{۶}{۳} + \binom{۳۹}{۳}\binom{۶}{۴}$

۲) الف) پاسخ برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱ + \cdots + x_۵ = ۱۰ \\ y_۱ + \cdots + y_۵ = ۸ \\ z_۱ + \cdots + z_۵ = ۱۲ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{۱۶}{۴}\binom{۱۲}{۴}\binom{۱۴}{۴}$ است.

ب) $\binom{۱۴}{۴}\binom{۱۲}{۴}\binom{۱۱}{۴}$

ج) $\binom{۱۴}{۴}\binom{۱۲}{۴}\binom{۵}{۳}\binom{۱۱}{۲}$

۳) برای سکهٔ ۱۰۰ ریالی ۴ انتخاب وجود دارد و تعداد راه‌های توزیع سکه‌های ۵۰ ریالی برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۴ = ۱۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_۱ \geq ۰$، $x_۲ \geq ۱$، $x_۳ \geq ۱$ و $x_۴ \geq ۱$ یعنی برابر $\binom{۱۲}{۳}$ است. پس پاسخ برابر $۴\binom{۱۲}{۳}$ است.

۴) به ۴ طریق می‌توان سکه‌های ۱۰۰ و ۲۵۰ ریالی را به یک نفر داد و سپس تعداد راه‌های توزیع سکه‌های ۵۰ ریالی برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۴ = ۱۲$ با شرایط $x_۱ \geq ۰$، $x_۲ \geq ۱$، $x_۳ \geq ۱$ و $x_۴ \geq ۱$ یعنی برابر $\binom{۱۲}{۳}$ است. همچنین به ۱۲ طریق می‌توان سکه‌های ۱۰۰ و ۲۵۰ ریالی را به دو فرد متفاوت داد و سپس تعداد راه‌های توزیع سکه‌های ۵۰ ریالی برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + \cdots + x_۴ = ۱۲$ با شرایط $x_۱ \geq ۰$، $x_۲ \geq ۰$، $x_۳ \geq ۱$ و $x_۴ \geq ۱$ یعنی برابر $\binom{۱۳}{۳}$ است. پس پاسخ برابر $۴\binom{۱۲}{۳} + ۱۲\binom{۱۳}{۳}$ است.

۵) الف) برای سکه‌های ۱۰ ریالی $\binom{۸}{۴}$ انتخاب و برای هر سکهٔ دیگر ۵ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر $۵^۶\binom{۸}{۴}$ است.

ب) به $\binom{۵}{۴}$ طریق می‌توان سکه‌های ۱۰ ریالی را به ۴ نفر داد و سپس بقیهٔ سکه‌ها را به $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$ طریق می‌توان توزیع کرد. به $\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۱}$ طریق می‌توان سکه‌های

۱۰ ریالی را به ۳ نفر داد و سپس بقیهٔ سکه‌ها را به $\binom{4}{2} \times 5 \times 6$ طریق می‌توان توزیع کرد. به $\binom{5}{2}$ طریق می‌توان سکه‌های ۱۰ ریالی را به ۲ نفر داد و سپس بقیهٔ سکه‌ها را به $\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ طریق می‌توان توزیع کرد. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{5}{4} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 + \binom{5}{3}\binom{3}{1} \times 6 \times 5 \times \binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$$

۶) تعداد راه‌های توزیع توپ‌ها به‌طوری‌که به علی و رضا در مجموع k توپ برسد برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 14 - k \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{17-k}{3}\binom{k+1}{1}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{1}{1}\binom{17}{3} + \binom{2}{1}\binom{16}{3} + \binom{3}{1}\binom{15}{3} + \binom{4}{1}\binom{14}{3} + \binom{5}{1}\binom{13}{3}$$

۷) الف) به $\binom{5}{3}$ طریق می‌توانیم توپ‌های قرمز را توزیع کنیم و تعداد راه‌های توزیع توپ‌های سفید برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_5 = 12$ با شرایط

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_4, x_5 \geq 1$$

یعنی برابر $\binom{14}{4}$ است. پس پاسخ برابر $\binom{14}{4}\binom{5}{3}$ است.

ب) به $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ طریق می‌توانیم توپ‌های قرمز را توزیع کنیم و تعداد راه‌های توزیع توپ‌های سفید برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_5 = 12$ با شرایط

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3, x_4, x_5 \geq 1$$

است. پس پاسخ برابر $\binom{13}{4}\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ است.

فصل ۶

بخش ۶—۱

۱) الف) ۲۵

ب) ۶۰

۲) تعداد مضارب ۳، ۵ و ۱۵ به ترتیب برابر ۳۳، ۲۰ و ۶ است. پس پاسخ برابر است با

$$۱۰۰ - ۳۳ - ۲۰ + ۶ = ۵۳$$

۳) تعداد مضارب ۲، ۳ و ۶ به ترتیب برابر ۵۰، ۳۳ و ۱۶ است. پس تعداد اعدادی که بر ۲ بخش‌پذیرند ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیستند برابر ۱۶—۵۰ و تعداد اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند ولی بر ۲ بخش‌پذیر نیستند برابر ۱۶—۳۳ است. پس پاسخ برابر است با

$$۵۰ + ۳۳ - ۲ \times ۱۶ = ۵۱$$

۴) در مجموعهٔ داده شده ۳۱ مربع کامل، ۱۰ مکعب کامل و ۳ توان ششم کامل وجود دارد (مثلاً برای محاسبهٔ تعداد مربع‌های کامل باید ببینیم چند عدد طبیعی k در نابرابری‌های $۱ \leq k^۲ \leq ۱۰۰۰$ صدق می‌کند). پاسخ برابر است با

$$۱۰۰۰ - ۳۱ - ۱۰ + ۳ = ۹۶۲$$

۵) فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۵ رقمی باشد و $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ اعضایی از S باشند که به ترتیب رقم ۰ و ۱ را ندارند.

الف) باید تعداد اعدادی را حساب کنیم که در هیچ یک از $A_۱$ و $A_۲$ قرار ندارند. تعداد این اعداد برابر است با

$$|S| - |A_۱| - |A_۲| + |A_۱ \cap A_۲| = ۹ \times ۱۰^۴ - ۹^۵ - ۸ \times ۹^۴ + ۸^۵$$

ب) باید تعداد اعدادی را حساب کنیم که فقط در یکی از $A_۱$ و $A_۲$ قرار دارند. تعداد این اعداد برابر است با

$$|A_۱|+|A_۲|-۲|A_۱\cap A_۲| = ۹^۵+۸\times ۹^۴-۲\times ۸^۵$$

ج) ابتدا دوتا از ارقام ۱، ۳، ۵ و ۷ را انتخاب می‌کنیم. مثلاً فرض کنید اعداد ۵ و ۷ را انتخاب کرده باشیم. S را مجموعهٔ همهٔ اعداد ۵ رقمی با ارقام ۰، ۲، ۴، ۵، ... و ۹ می‌گیریم و $B_۱$ و $B_۲$ را مجموعهٔ اعضایی از S می‌گیریم که به ترتیب ارقام ۵ و ۷ را ندارند. تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از $B_۱$ و $B_۲$ قرار ندارند برابر است با

$$|S|-|B_۱\cup B_۲| = ۷\times ۸^۴-٦\times ۷^۴-٦\times ۷^۴+۵\times ٦^۴$$

پس پاسخ مسأله برابر است با

$$\binom{۴}{۲}(۷\times ۸^۴-۲\times ٦\times ۷^۴+۵\times ٦^۴)$$

٦) $\frac{۱۰!}{۲!۲!}-۲\times\frac{۹!}{۲!}+۸!$

۷) $۹!-۷!-۸!+٦!$

۸) فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۵ رقمی، $A_۱$ مجموعهٔ اعضایی از S باشد که رقم زوج ندارند و $A_۲$ مجموعهٔ اعضایی از S باشد که هیچ یک از ارقام ۰، ۳، ٦ و ۹ را ندارند. در صورتی حاصل‌ضرب ارقام یک عدد ۵ رقمی بر ٦ بخش‌پذیر است که در هیچ یک از $A_۱$ و $A_۲$ قرار نداشته باشد. پس تعداد این اعداد برابر است با

$$|S|-|A_۱\cup A_۲| = ۹\times ۱۰^۴-۵^۵-٦^۵+۳^۵$$

۹) فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۵ رقمی با ارقام ۳، ۴، ... و ۸ باشد و $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ اعضایی از S باشند که به ترتیب رقم ۳ و ۸ را ندارند. باید تعداد اعضایی از S را حساب کنیم که در هیچ یک از $A_۱$ و $A_۲$ قرار ندارند. پس پاسخ برابر است با

$$|S|-|A_۱\cup A_۲| = ٦^۵-۵^۵-۵^۵+۴^۵$$

۱۰) فرض کنید S مجموعهٔ کلیهٔ روش‌های توزیع ۱۰ توپ باشد، در این صورت $|S| = ۴^{۱۰}$.

الف) فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشند که به ترتیب به دختر اول و دوم توپی نرسد. باید تعداد توزیع‌هایی را بیابیم که در هیچ یک از $A_۱$ و $A_۲$ قرار ندارند. تعداد این توزیع‌ها برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲| = ۴^{۱۰} - ۳^{۱۰} - ۳^{۱۰} + ۲^{۱۰}$$

ب) فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشند که به ترتیب به دختر اول و دوم حداکثر یک توپ می‌رسد. باید تعداد توزیع‌هایی را بیابیم که در هیچ یک از $B_۱$ و $B_۲$ قرار ندارند. تعداد این توزیع‌ها برابر است با

$$\begin{aligned} |S| - |B_۱ \cup B_۲| &= ۴^{۱۰} - ۲\left(۳^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱} ۳^{۹}\right) \\ &+ \left(۲^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱} ۲^{۹} + \binom{۱۰}{۱} ۲^{۹} + \binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۱} ۲^{۸}\right) \end{aligned}$$

به عنوان مثال برای محاسبهٔ تعداد اعضای $B_۱$ دو حالت در نظر می‌گیریم. یک حالت این که به دختر اول توپی نرسد و حالت دیگر این که به این دختر فقط یک توپ برسد.

ج) فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشند که به ترتیب به دختر اول و دوم دقیقاً دو توپ برسد. باید تعداد توزیع‌هایی را بیابیم که در هیچ یک از $C_۱$ و $C_۲$ قرار ندارند. تعداد این توزیع‌ها برابر است با

$$|S| - |C_۱ \cup C_۲| = ۴^{۱۰} - ۲ \times \binom{۱۰}{۲} \times ۳^{۸} + \binom{۱۰}{۲}\binom{۸}{۲} ۲^{۶}$$

به عنوان مثال برای محاسبهٔ تعداد اعضای $C_۱ \cap C_۲$ ابتدا دو توپ برای دختر اول، سپس دو توپ برای دختر دوم انتخاب می‌کنیم و شش توپ باقی‌مانده را بین دو پسر تقسیم می‌کنیم؛ لذا $|C_۱ \cap C_۲| = \binom{۱۰}{۲}\binom{۸}{۲} ۲^{۶}$.

۱۱) الف) پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$۰ \leq x_۱ \leq ۳, \quad ۰ \leq x_۲ \leq ۳, \quad x_۳ \geq ۰, \quad x_۴ \geq ۰$$

است. فرض کنید S مجموعهٔ جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی باشد، $A_۱$ مجموعهٔ جواب‌هایی از S باشد که $x_۱ \geq ۴$ و $A_۲$ مجموعهٔ جواب‌هایی از S باشد که $x_۲ \geq ۴$. لذا باید تعداد جواب‌هایی از S را بیابیم که در هیچ یک از $A_۱$ و $A_۲$ قرار ندارند. تعداد این جواب‌ها برابر است با

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲| = \binom{۱۳}{۳} - \binom{۹}{۳} - \binom{۹}{۳} + \binom{۵}{۳}$$

ب) روش حل همانند قسمت قبل است. فقط در این قسمت به جای $x_۳, x_۴ \geq ۰$ باید شرط $x_۳, x_۴ \geq ۱$ را در نظر بگیریم. پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۱}{۳} - \binom{۷}{۳} - \binom{۷}{۳} + \binom{۳}{۳}$$

ج) فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ مجموعهٔ جواب‌هایی از S باشند که به ترتیب $x_۱ = ۳$ و $x_۲ = ۳$. باید تعداد جواب‌هایی از S را بیابیم که در هیچ یک از $B_۱$ و $B_۲$ قرار ندارند. تعداد این جواب‌ها برابر است با

$$|S| - |B_۱ \cup B_۲| = \binom{۱۳}{۳} - \binom{۹}{۲} - \binom{۹}{۲} + \binom{۵}{۱}$$

به عنوان مثال تعداد اعضای $B_۱$ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی یعنی برابر $\binom{۹}{۲}$ است.

۱۲) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷ + ۴ \times ۵ \times ۵ \times ۵ - ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲$

۱۳) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۹^۴ + ۵^۴ - ۵ \times ۴^۳$

۱۴)

$$\begin{aligned} |A_۱ \cup A_۲| &= |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| \\ &= ۲\left(\binom{۸}{۴} \times ۳^۴ + \binom{۸}{۵} \times ۳^۳ + \binom{۸}{۶} \times ۳^۲ + \binom{۸}{۷} \times ۳ + \binom{۸}{۸}\right) \\ &\quad -\binom{۸}{۴} \end{aligned}$$

۱۵) الف) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ حالت‌های انتخاب تیم‌ها باشد، $X_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که A هیچ روز عضو تیم نیست و $X_۲$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که B هیچ روزی عضو تیم نیست. باید تعداد حالت‌هایی را بیابیم که در هیچ یک از $X_۱$ و $X_۲$ قرار ندارند. تعداد این حالت‌ها برابر است با

$$|S| - |X_۱ \cup X_۲| = \binom{۶}{۳}^۵ - ۲\binom{۵}{۳}^۵ + \binom{۴}{۳}^۵$$

ب) $Y_۱$ را مجموعهٔ حالت‌هایی می‌گیریم که A هر روز عضو تیم است و $Y_۲$ را مجموعهٔ حالت‌هایی می‌گیریم که B هر روز عضو تیم است. پاسخ برابر است با

$$|S| - |Y_۱ \cup Y_۲| = \binom{۶}{۳}^۵ - ۲\binom{۵}{۲}^۵ + \binom{۴}{۱}^۵$$

ج) $X_۳$ را مجموعهٔ حالت‌هایی می‌گیریم که A حداکثر یک روز عضو تیم باشد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned} |S| - |X_۲ \cup X_۳| &= \binom{۶}{۳}^۵ - \binom{۵}{۳}^۵ - \left(\binom{۵}{۳}^۵ + \binom{۵}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۳}^۴\right) \\ &\quad + \left(\binom{۴}{۳}^۵ + \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۳}^۴\right) \end{aligned}$$

به عنوان مثال $\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۳}^۴$ برابر تعداد حالت‌هایی است که A دقیقاً یک روز عضو تیم است.

د) $Y_۳$ را مجموعهٔ حالت‌هایی می‌گیریم که A حداکثر یک روز عضو تیم نباشد. پاسخ

برابر است با

$$|S|-|Y_۲\cup Y_۳| \;=\; \binom{۶}{۳}^۵-\binom{۵}{۲}^۵-\left(\binom{۵}{۲}^۵+\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۲}^۴\right)$$

$$+\left(\binom{۴}{۱}^۵+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}^۴\right)$$

به عنوان مثال $\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۲}^۴$ برابر تعداد حالت‌هایی است که A دقیقاً یک روز عضو تیم نیست.

ه) $W_۱$ را مجموعهٔ حالت‌هایی می‌گیریم که A و B هیچ روز با هم عضو تیم نباشند و $W_۲$ را مجموعهٔ حالت‌هایی می‌گیریم که C و D هیچ روز با هم عضو تیم نباشند. پاسخ برابر است با

$$|S|-|W_۱\cup W_۲| = \binom{۶}{۳}^۵-۲\left(\binom{۶}{۳}-\binom{۴}{۱}\right)^۵+\left(\binom{۶}{۳}-۲\binom{۴}{۱}\right)^۵$$

به عنوان مثال $\binom{۶}{۳}-\binom{۴}{۱}$ برابر تعداد راه‌های انتخاب یک تیم ۳ نفره است که حداقل یکی از A و B انتخاب نشوند.

۱۶) الف) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ روش‌های توزیع باشد، $X_۱$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق A دکتر نباشد و $X_۲$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق B دکتری نباشد. پاسخ برابر است با

$$|S|-|X_۱\cup X_۲| = \binom{۱۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}-۲\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۰}{۵}+\binom{۱۰}{۵}$$

ب) فرض کنید $Y_۱$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق A مهندس نباشد. پاسخ برابر است با

$$|S|-|X_۱\cup Y_۱| = \binom{۱۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}-۲\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۰}{۵}+\binom{۱۰}{۵}$$

ج) فرض کنید $Z_۱$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق A حداکثر یک دکتر باشد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|Y_1\cup Z_1| &= \binom{15}{5}\binom{10}{5}-\binom{10}{5}\binom{10}{5}\\ &-\left(\binom{10}{5}\binom{10}{5}+\binom{5}{1}\binom{10}{4}\binom{10}{5}\right)\\ &+\left(\binom{10}{5}+\binom{5}{1}\binom{5}{4}\binom{10}{5}\right)\end{aligned}$$

د) پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|X_2\cup Z_1| &= \binom{15}{5}\binom{10}{5}-\binom{10}{5}\binom{10}{5}\\ &-\left(\binom{10}{5}\binom{10}{5}+\binom{5}{1}\binom{10}{4}\binom{10}{5}\right)\\ &+\left(\binom{10}{5}+\binom{5}{1}\binom{10}{4}\binom{6}{5}\right)\end{aligned}$$

ه) فرض کنید Y_2 مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق B مهندس نباشد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|X_1\cup Y_2| &= \binom{15}{5}\binom{10}{5}-2\binom{10}{5}\binom{10}{5}+\binom{5}{0}\binom{5}{5}\binom{5}{5}\\ &+\binom{5}{1}\binom{5}{4}\binom{6}{5}+\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{7}{5}+\binom{5}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{5}\\ &+\binom{5}{4}\binom{5}{1}\binom{9}{5}+\binom{5}{5}\binom{5}{0}\binom{10}{5}\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ تعداد اعضای $X_1\cap Y_2$ روی تعداد مهندسین اتاق A حالت‌بندی شده است.

و) فرض کنید W_1 مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق A دقیقاً ۲ دکتر و W_2 مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در اتاق B دقیقاً یک دکتر باشد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|W_1\cup W_2| &= \binom{15}{5}\binom{10}{5}-\binom{5}{2}\binom{10}{3}\binom{10}{5}\\ &-\binom{5}{1}\binom{10}{4}\binom{10}{5}+\binom{5}{2}\binom{10}{3}\binom{3}{1}\binom{7}{4}\end{aligned}$$

۱۷) الف) فرض کنید S مجموعهٔ کل روش‌های انتخاب ۸ نفر باشد، $A_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که هیچ کلاس اولی عضو تیم نباشد و $A_۲$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که هیچ کلاس دومی عضو تیم نباشد. پاسخ برابر است با

$$|S|-|A_۱\cup A_۲|=\binom{۳۰}{۸}-۲\binom{۲۰}{۸}+\binom{۱۰}{۸}$$

ب) فرض کنید $B_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که حداکثر یک کلاس اولی عضو تیم باشد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|B_۱\cup A_۲| &= \binom{۳۰}{۸}-\left(\binom{۲۰}{۸}+\binom{۱۰}{۱}\binom{۲۰}{۷}\right)\\ &\quad -\binom{۲۰}{۸}+\left(\binom{۱۰}{۸}+\binom{۱۰}{۱}\binom{۱۰}{۷}\right)\end{aligned}$$

ج) فرض کنید $C_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که ۳ کلاس اولی عضو تیم باشند و $C_۲$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که دو کلاس دومی عضو تیم باشند. پاسخ برابر است با

$$|S|-|C_۱\cup C_۲|=\binom{۳۰}{۸}-\binom{۱۰}{۳}\binom{۲۰}{۷}-\binom{۱۰}{۲}\binom{۲۰}{۸}+\binom{۱۰}{۳}\binom{۱۰}{۲}\binom{۱۰}{۵}$$

۱۸) $\binom{۱۴}{۲}-\binom{۸}{۲}-\binom{۱۰}{۲}+\binom{۴}{۲}$

۱۹) تعداد روش‌های توزیع سکه‌ها برابر تعداد جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰\\ y_۱+y_۲+y_۳+y_۴=۸\end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جواب‌های این دستگاه باشد. $A_۱$ مجموعهٔ جواب‌هایی از S باشد که $x_۱=y_۱=۰$ (یعنی حالت‌هایی که به علی سکه نرسد) و $A_۲$ مجموعهٔ جواب‌هایی از S باشد که $x_۲=y_۲=۰$. پاسخ برابر است با

$$|S|-|A_۱\cup A_۲|=\binom{۱۳}{۳}\binom{۱۱}{۳}-۲\binom{۱۲}{۲}\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۱}{۱}\binom{۹}{۱}$$

۲۰) فرض کنید $A_{۱}$ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت $۱۰۰^{۳۰}$ و $A_{۲}$ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت $۱۲۰^{۴۰}$ باشد. با توجه به این که $۱۰۰^{۳۰} = ۲^{٦۰} \times ۵^{٦۰}$ و $۱۲۰^{۴۰} = ۲^{۱۲۰} \times ۳^{۴۰} \times ۵^{۴۰}$، نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$|A_{۱} \cup A_{۲}| = |A_{۱}| + |A_{۲}| - |A_{۱} \cap A_{۲}| = ٦۱^{۲} + ۱۲۱ \times ۴۱^{۲} - ٦۱ \times ۴۱$$

۲۱) فرض کنید S مجموعهٔ همه جایگشت‌های حروف کلمهٔ triangle باشد و $A_{۱}$ و $A_{۲}$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب حرف r و g سر جای اصلی خود قرار دارند. پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_{۱} \cup A_{۲}| = ۸! - ۲ \times ۷! + ٦!$$

۲۲) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ روش‌های احداث جاده بین این ۵ شهر باشد، $X_{۱}$ مجموعهٔ حالت‌هایی که از شهر A و $X_{۲}$ مجموعهٔ حالت‌هایی که از شهر B هیچ جاده‌ای خارج نشود. پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_{۱} \cup A_{۲}| = ۲^{۱۰} - ۲^{٦} - ۲^{٦} + ۲^{۳}$$

۲۳) الف) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ حالت‌های انتخاب تیم ۲۱ نفره باشد. $A_{۱}$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که همهٔ کلاس اولی‌ها عضو تیم باشند و $A_{۲}$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که همهٔ کلاس دومی‌ها عضو تیم باشند. پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_{۱} \cup A_{۲}| = \binom{۳۰}{۲۱} - ۲\binom{۲۰}{۱۱} + \binom{۱۰}{۱}$$

ب) فرض کنید $B_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که حداقل ۹ کلاس اولی عضو تیم باشند. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|A_۲\cup B_۱| &= \binom{۳۰}{۲۱}-\binom{۲۰}{۱۱}-\left(\binom{۲۰}{۱۱}+\binom{۱۰}{۹}\binom{۲۰}{۱۲}\right)\\&\quad+\left(\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۹}\binom{۱۰}{۲}\right)\end{aligned}$$

۲۴) الف) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ روش‌های توزیع باشد، $X_۱$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد در هر اتاق یک دکتر باشد و $X_۲$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در هر اتاق یک مهندس باشد. پاسخ برابر است با

$$|S|-|X_۱\cup X_۱|=\binom{۹}{۳}\binom{٦}{۳}-۲\times ۳!\binom{٦}{۲}\binom{۴}{۲}+۳!\times ۳!\times ۳!$$

ب) فرض کنید $Y_۱$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که دکترها در یک اتاق باشند و $Y_۲$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که مهندسین در یک اتاق باشند. پاسخ برابر است با

$$|S|-|Y_۱\cup Y_۲|=\binom{۹}{۳}\binom{٦}{۳}-۲\times ۳\times \binom{٦}{۳}+۳!$$

بخش ٦—۲

۱) الف) ۳۵

ب) ۴۰

ج) ۱۰

۲) مشابه روش دوم اثبات قضیهٔ ۱.۲.٦ عمل کنید.

۳) فرض کنید $S=\{۱,۲,\ldots,۳۰۰\}$ و $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعهٔ اعضایی از S باشند که به ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند.

الف) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 = 220$

ب) پاسخ برابر است با

$$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 50 + 30 + 20 - 3 \times 10 = 70$$

ج) پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}
&|A_1| + |A_2| + |A_3| - 2|A_1 \cap A_2| - 2|A_1 \cap A_3| - 2|A_2 \cap A_3| \\
&+3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 150 + 100 + 60 - 2 \times 50 - 2 \times 30 - 2 \times 20 + 3 \times 10 \\
&= 140
\end{aligned}$$

د) پاسخ برابر است با

$$|A_1| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 150 - 50 - 30 + 10 = 80$$

۴) الف) فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۷ رقمی باشد و A_i مجموعهٔ اعضایی از S باشد که رقم i را ندارند. پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 9 \times 10^6 - 3 \times 8 \times 9^6 + 3 \times 7 \times 8^6 - 6 \times 7^6$$

ب) پاسخ برابر است با

$$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \times 7 \times 8^6 - 3 \times 6 \times 7^6$$

ج) ابتدا ۳ تا از ۵ رقم ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید ۳ رقم انتخاب شده برابر a، b و c باشند، S مجموعهٔ اعداد ۷ رقمی با ارقام a، b، c، ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ باشد، A مجموعهٔ اعضایی از S باشد که رقم a را ندارند، B مجموعهٔ اعضایی از S باشد که رقم b را ندارند و C مجموعهٔ اعضایی از S باشد که رقم c را ندارند. تعداد اعضایی از S که هر سه رقم a، b و c را دارند برابر است با

$$|S| - |A \cup B \cup C| = 7 \times 8^6 - 3 \times 6 \times 7^6 + 3 \times 5 \times 6^6 - 4 \times 5^6$$

نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$\binom{۵}{۳}(۷ \times ۸^{۶} - ۳ \times ۶ \times ۷^{۶} + ۳ \times ۵ \times ۶^{۶} - ۴ \times ۵^{۶})$$

۵) الف) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ کلمات ۸ حرفی با حروف a، b و c باشد، A مجموعهٔ کلماتی از S که حرف a را ندارند، B مجموعهٔ کلماتی که حرف b را ندارند و C مجموعهٔ کلماتی باشد که حرف c را ندارند. پاسخ برابر است با

$$|S| - |A \cup B \cup C| = ۳^{۸} - ۳ \times ۲^{۸} + ۳$$

ب) $\binom{۵}{۳}(۳^{۸} - ۳ \times ۲^{۸} + ۳)$

۶) $\frac{۱۱!}{۲!۲!۲!} - ۳ \times \frac{۱۰!}{۲!۲!} + ۳ \times \frac{۹!}{۲!} - ۸!$

۷) $\frac{۱۳!}{۳!۳!۲!} - \frac{۱۱!}{۲!۲!۲!} - \frac{۱۱!}{۳!۳!} - \frac{۱۱!}{۳!۲!۲!} + \frac{۹!}{۲!۲!} + \frac{۹!}{۲!۲!} + \frac{۹!}{۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!}$

۸) الف) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ توزیع‌های ممکن باشد و $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ مجموعهٔ توزیع‌هایی باشند که به ترتیب اتاق A، B و C خالی بماند. پاسخ برابر است با

$$|S| - |X_۱ \cup X_۲ \cup X_۳| = ۳^{۱۰} - ۳ \times ۲^{۱۰} + ۳$$

ب) $Y_۱$، $Y_۲$ و $Y_۳$ را مجموعهٔ توزیع‌هایی می‌گیریم که به ترتیب در اتاق A، B و C حداکثر یک نفر قرار گیرد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned} |S| - |Y_۱ \cup Y_۲ \cup Y_۳| &= ۳^{۱۰} - ۳\left(۲^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}۲^{۹}\right) \\ &\quad + ۳\left(۱ + ۲\binom{۱۰}{۱} + \binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۱}\right) \end{aligned}$$

ج) $W_۱$، $W_۲$ و $W_۳$ را مجموعهٔ توزیع‌هایی می‌گیریم که به ترتیب در اتاق A، B و C دو نفر قرار گیرند. پاسخ برابر است با

$$|S| - |W_۱ \cup W_۲ \cup W_۳| = ۳^{۱۰} - ۳ \times \binom{۱۰}{۲}۲^{۸} + ۳ \times \binom{۱۰}{۲}\binom{۸}{۲}$$

۹) ابتدا ۳ تا از پسربچه‌ها را انتخاب می‌کنیم. حال تعداد روش‌های توزیع توپ‌ها را بین این ۳ پسربچه به‌طوری‌که به هر یک حداقل یک توپ برسد همانند مسألهٔ ۸ـ الف به‌دست می‌آوریم. پاسخ برابر است با

$$\binom{5}{3}(3^{10} - 3 \times 2^{10} + 3)$$

۱۰) الف) $9! - 3 \times 8! + 3 \times 7! - 6!$

ب) $3 \times 7! - 3 \times 6!$

ج) $\binom{6}{3}(6! - 3 \times 5! + 3 \times 4! - 3!)$

۱۱) الف) ۱۷

ب) ٦

۱۲) فرض کنید S مجموعهٔ اعداد ۸ رقمی باشد و A_i مجموعهٔ اعضایی از S باشد که رقم i بیش از ۳ بار در آن‌ها آمده است. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= 3\left(\binom{8}{4} \times 8^4 + \binom{8}{5} \times 8^3 + \binom{8}{6} \times 8^2 + \binom{8}{7} \times 8 + \binom{8}{8}\right) \\ &\quad -3\binom{8}{4}\end{aligned}$$

۱۳) الف) $\binom{14}{2} - 3\binom{8}{2} + 3\binom{2}{2}$

ب) $\binom{14}{2} - 3\binom{9}{1} + 3 - 1$

۱۴) الف) $\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} - 3 \times 5!\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} + 3 \times 5! \times 5! \times 5! - 5! \times 5! \times 5!$

ب) فرض کنید X_1 مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در یک اتاق هر ۳ نفر دکتر باشند، X_2 مجموعهٔ توزیع‌هایی باشد که در یک اتاق هر ۳ نفر مهندس باشند و X_3 مجموعهٔ

توزیع‌هایی باشد که در یک اتاق هر ۳ نفر معلم باشند. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|X_1 \cup X_2 \cup X_3| &= 3\binom{5}{1}\binom{5}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\\ &\quad -3\binom{5}{1}\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{5}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\\ &\quad +\binom{5}{1}\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{5}{3}\binom{3}{1}\binom{5}{3}\binom{6}{3}\end{aligned}$$

ج) $3\binom{5}{1}^3\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} - 3\binom{5}{1}^3\binom{4}{1}^3\binom{9}{3}\binom{6}{3} + \binom{5}{1}^3\binom{4}{1}^3\binom{3}{1}^3\binom{6}{3}$

۱۵) الف) $\binom{15}{5}\binom{10}{5} - 3\binom{10}{5}\binom{10}{5} + 3\binom{10}{5}$

ب) $\binom{15}{5}\binom{10}{5} - 3\binom{10}{5}\binom{10}{5} + 3\binom{10}{5}$

ج) $\binom{15}{5}\binom{10}{5} - 3 \times 3 \times \binom{10}{5} + 3 \times 3! - 3!$

د) $\binom{15}{5}\binom{10}{5} - 3\binom{5}{1}\binom{10}{4}\binom{10}{5} + 3\binom{5}{1}\binom{10}{4}\binom{4}{1}\binom{6}{4}$

۱۶) الف) $\binom{30}{14} - 3\binom{20}{14}$

ب) $\binom{30}{14} - 3\binom{20}{4}$

۱۷) $\binom{32}{2} - \binom{19}{2} - \binom{17}{2} - \binom{21}{2} + \binom{4}{2} + \binom{8}{2} + \binom{6}{2}$

۱۸) فرض کنید S مجموعهٔ جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 12 \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی باشد و A_1، A_2 و A_3 مجموعهٔ جواب‌هایی از S باشند که به ترتیب $x_1 = y_1 = 0$، $x_2 = y_2 = 0$ و $x_3 = y_3 = 0$. باید تعداد جواب‌هایی از S را بیابیم که در هیچ یک از A_1، A_2 و A_3 قرار ندارند. تعداد این جواب‌ها برابر است با

$$\binom{12}{2}\binom{14}{2} - 3\binom{11}{1}\binom{13}{1} + 3$$

۱۹) فرض کنید $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ به ترتیب مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت $۹۰^{۵۰}$، $۱۲۰^{۴۰}$ و $۱۵۰^{۳۰}$ باشند. در این صورت پاسخ برابر است با

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۱۰۱ \times ۵۱^۲ + ۱۲۱ \times ۴۱^۲ + ۶۱ \times ۳۱^۲ - ۵۱ \times ۴۱^۲$$
$$-۵۱ \times ۳۱^۲ - ۴۱ \times ۳۱^۲ + ۴۱ \times ۳۱^۲$$

۲۰) $۲^{۱۰} - ۳ \times ۲^۶ + ۳ \times ۲^۳ - ۲$

۲۱) پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط

$$۰ \le x_۱ \le ۵, \quad ۰ \le x_۲ \le ۸, \quad ۰ \le x_۳ \le ۱۴$$

است. تعداد این جواب‌ها برابر است با

$$\binom{۱۷}{۲} - \binom{۱۱}{۲} - \binom{۸}{۲} - \binom{۲}{۲} + \binom{۲}{۲}$$

۲۲) الف) دو رقم ۲، هجده رقم ۱ را به ۳ دسته تقسیم می‌کنند. فرض کنید در این سه دسته به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ رقم ۱ وجود داشته باشد. در این صورت پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۸$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $۰ \le x_i \le ۹$ یعنی برابر $\binom{۲۰}{۲} - ۳\binom{۱۰}{۲}$ است.

ب) پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۸$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $۰ \le x_i \le ۷$ یعنی برابر $\binom{۲۰}{۲} - ۳\binom{۱۲}{۲} + ۳\binom{۴}{۲}$ است.

۲۳) فرض کنید به نفر اول به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ سکهٔ ۲۰ ریالی، ۵۰ ریالی و ۱۰۰ ریالی برسد. در این صورت $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۶$ و

$$۰ \le x_۱ \le ۱۰, \quad ۰ \le x_۲ \le ۸, \quad ۰ \le x_۳ \le ۱۴$$

تعداد جواب‌های این معادله برابر است با

$$\binom{۱۸}{۲}-\binom{۷}{۲}-\binom{۹}{۲}-\binom{۳}{۲}$$

پاسخ مسأله برابر با همین عدد است.

۲۴) الف) فرض کنید S مجموعهٔ کل روش‌های قرار دادن ۵ رخ در صفحهٔ شطرنجی باشد، $X_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی که در سطر و ستون اول هیچ رخی قرار نگیرد، $X_۲$ مجموعهٔ حالت‌هایی که در سطر و ستون دوم هیچ رخی قرار نگیرد و $X_۳$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که در سطر و ستون سوم هیچ رخی قرار نگیرد. پاسخ برابر است با

$$|S|-|X_۱\cup X_۲\cup X_۳|=\binom{۶۱}{۵}-۳\binom{۴۷}{۵}+۳\binom{۳۵}{۵}-\binom{۲۵}{۵}$$

ب) فرض کنید $Y_۱$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که در سطر اول و ستون دوم هیچ رخی قرار نگیرد و $Y_۲$ مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که در سطر دوم و ستون سوم هیچ رخی قرار نگیرد. پاسخ برابر است با

$$\begin{aligned}|S|-|X_۱\cup Y_۲\cup Y_۳| &= \binom{۶۱}{۵}-\binom{۴۸}{۵}-\binom{۴۸}{۵}-\binom{۴۷}{۵}+\binom{۴۱}{۵}\\ &+\binom{۴۲}{۵}+\binom{۴۲}{۵}-\binom{۳۰}{۵}\end{aligned}$$

۲۵) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ روش‌های قرار دادن مهره‌ها در جدول باشد و A_i مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که در سطر i ام هیچ مهره‌ای قرار نداشته باشد. پاسخ برابر است با

$$|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=\binom{۶۰}{۱۰}-۳\binom{۴۰}{۱۰}+۳\binom{۲۰}{۱۰}$$

۲۶) فرض کنید A_i مجموعهٔ روش‌های قرار دادن سه رخ باشد که مهرهٔ i ام توسط دو مهره دیگر تهدید نشود. در این صورت پاسخ برابر است با

$$|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۳\times ۶۴\times ۴۹\times ۴۸-۳\times ۶۴\times ۴۹\times ۳۶+۶۴\times ۴۹\times ۳۶$$

فصل ۷

بخش ۷ــ۱

۱) چنان‌چه ۳۵ دانش‌آموز را بر اساس حرف اول فامیل دسته‌بندی کنیم به حداکثر ۳۲ دسته تقسیم می‌شوند و لذا دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو دانش‌آموز در آن قرار می‌گیرند.

۲) الف) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۱۶\}, \{۲, ۱۵\}, \{۳, ۱۴\}, \ldots, \{۸, ۹\}$$

ب) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۹\}, \{۲, ۱۰\}, \{۳, ۱۱\}, \ldots, \{۸, ۱۶\}$$

ج) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۳\}, \{۲, ۴\}, \{۵, ۷\}, \{۶, ۸\}, \ldots, \{۱۳, ۱۵\}, \{۱۴, ۱۶\}$$

د) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}, \{۵, ۶\}, \ldots, \{۱۵, ۱۶\}$$

ه) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\}, \{۳, ۶, ۱۲\}, \{۵, ۱۰\}, \{۷, ۱۴\}, \{۹\}, \{۱۱\}, \{۱۳\}, \{۱۵\}$$

۳) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\}, \{۵, ۶, ۷, ۸\}, \ldots, \{۳۷, ۳۸, ۳۹, ۴۰\}$$

۴) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱, ۲\}, \{۳, ۲۰\}, \{۴, ۱۹\}, \{۵, ۱۸\}, \ldots, \{۱۱, ۱۲\}$$

۵) با توجه به این که $\binom{۹}{۲} > ۴۰$ حکم واضح است.

٦) هر یک از ۱۲ مجموع برابر یکی از مقادیر ۰، ۱، ۲، ... و ۱۰ هستند. پس حداقل دوتا از آن‌ها با هم برابرند.

۷) دسته‌بندی زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۲, ۳\}, \{۴, \ldots, ۷\}, \{۸, \ldots, ۱۵\}, \{۱٦, \ldots, ۳۱\}, \ldots, \{۵۱۲, \ldots, ۱۰۲۳\}$$

پس اعداد مجموعهٔ داده شده به ۹ دسته تقسیم می‌شوند، لذا از ۱۰ عدد داده شده حداقل دو عدد در یک دسته قرار می‌گیرند، مثلاً فرض کنید x و y در یک دسته قرار داشته باشند و $x > y$. با توجه به روش دسته‌بندی $x < ۲y$ و حکم ثابت می‌شود.

۸) روی خط ۱۸ نقطه در نظر بگیرید که هر نقطه غیر از اولین نقطه یک متر از نقطهٔ قبلی جلوتر باشد.

۹) از نقطهٔ O، ۱۲ نیم‌خط رسم می‌کنیم به‌طوری‌که زاویهٔ بین هر دو نیم‌خط مجاور ۳۰° باشد. صفحه به ۱۲ ناحیه تقسیم می‌شود، لذا دوتا از A_i ها مثلاً A_r و A_s در یکی از این ناحیه‌ها قرار دارند. زاویهٔ بین OA_r و OA_s کمتر از ۳۰° است.

۱۰) اعداد مجموعهٔ داده شده را به صورت زیر به ۹ دسته تقسیم می‌کنیم.

$$\{۱, \ldots, ۷\}, \{۸, \ldots, ۲٦\}, \{۲۷, \ldots, ٦۳\}, \ldots, \{۷۲۹, \ldots, ۹۹۹\}$$

(کوچکترین عدد دستهٔ k ام برابر $k^۳$ و بزرگترین عدد این دسته برابر $(k+۱)^۳ - ۱$ است.) حال از ۱۰ عدد داده شده دوتا مثلاً x و y در یک دسته قرار دارند، پس

به‌ازای k ای

$$k^{۳} \leq x < y < (k+۱)^{۳}$$

و لذا $\sqrt[۳]{y} - \sqrt[۳]{x} < ۱$.

۱۱) در واقع مسأله برای صفحهٔ شطرنجی ۹ × ۹ نیز درست است. زیرا اگر خانه‌های این صفحهٔ شطرنجی را به ۹ مربع ۳ × ۳ تقسیم کنیم، آنگاه حداقل دو مهرهٔ شاه در یک دسته قرار می‌گیرند و اگر دو مهرهٔ شاه در یک مربع ۳ × ۳ قرار داشته باشند، خانه‌ای وجود دارد که توسط هر دوی این مهره‌ها تهدید می‌شود.

۱۲) مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۳}$ تقسیم کنید.

۱۳) مربع را به ۹ مربع به ضلع واحد تقسیم کنید.

۱۴) دو فرودگاه در نظر بگیرید که بین آن‌ها پرواز مستقیم وجود نداشته باشد. هر یک از این دو حداقل ۸ پرواز به ۱۵ فرودگاه دیگر دارند و لذا یکی از این ۱۵ فرودگاه به هر دو فرودگاه پرواز مستقیم دارد.

۱۵) امتیاز هر فرد یکی از اعداد ۰، ۱، ... و ۵۰ غیر از ۴۸ و ۴۹ است. لذا حداکثر ۴۹ امتیاز مختلف وجود دارد.

۱۶) الف) باقی‌ماندهٔ هر عدد صحیح در تقسیم بر ۲۴ یکی از اعداد ۰، ۱، ... و ۲۳ است. لذا هر عدد صحیح برحسب باقی‌ماندهٔ تقسیمش بر ۲۴ در یکی از ۱۳ دستهٔ زیر قرار می‌گیرد.

$$\{۰\}, \{۱, ۲۳\}, \{۲, ۲۲\}, \{۳, ۲۱\}, \ldots, \{۱۱, ۱۳\}, \{۱۲\}$$

اگر دو عدد صحیح در یک دسته قرار داشته باشند مجموع یا تفاضل آن‌ها بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

ب) هر عدد صحیح برحسب باقی‌ماندهٔ تقسیمش بر ۲۵ در یکی از ۱۳ دستهٔ زیر قرار می‌گیرد.

$$\{۰\}, \{۱, ۲۴\}, \{۲, ۲۳\}, \{۳, ۲۲\}, \ldots, \{۱۲, ۱۳\}$$

اگر دو عدد در یک دسته قرار داشته باشند مجموع یا تفاضل آن‌ها بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۱۷) دنبالهٔ اعداد

$$۳^{۱}, ۳^{۲}, ۳^{۳}, \ldots, ۳^{۲۵۳۷}$$

را در نظر بگیرید. تفاضل دوتا از این اعداد بر ۲۵۳۶ بخش‌پذیر است.

۱۸) دنبالهٔ اعداد

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱۱, \ldots, ۱۱\ldots۱$$

(شامل ۲۵۳۷ عدد) را در نظر بگیرید. تفاضل دوتا از این اعداد بر ۲۵۳۶ بخش‌پذیر است.

۱۹) فرض کنید $a = ۲^{۱۰۰}$. چون در دنبالهٔ

$$\sigma(a), \sigma(a+۱), \sigma(a+۲), \ldots, \sigma(a+۱۰۰۰)$$

۱۰۰۱ عدد وجود دارد لذا تفاضل دوتا از آن‌ها بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۲۰) چون از هر ۱۰ عدد متوالی از S حداقل یکی عضو A است، پس A حداقل ۲۲ عضو دارد. فرض کنید

$$a_{۱} < a_{۲} < a_{۳} < \cdots < a_{۲۲}$$

۲۲ عضو اول A باشند، در این صورت برای هر i، $a_{i+1} \leq a_i + 10$، زیرا از بین ۱۰ عدد

$$a_i + 1, a_i + 2, \ldots, a_i + 10$$

حداقل یکی باید عضو A باشد. حال ۱۱ عدد زیر حداکثر ۱۰ مقدار مختلف دارند.

$$a_2 - a_1, a_4 - a_3, a_6 - a_5, \ldots, a_{22} - a_{21}$$

پس حداقل دوتا از این اعداد برابرند، مثلاً $a_{2i} - a_{2i-1} = a_{2j} - a_{2j-1}$ و لذا

$$a_{2i} + a_{2j-1} = a_{2j} + a_{2i-1}$$

۲۱) تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از ۷ عدد داده شده برابر $21 = \binom{7}{2}$ است، لذا به‌ازای دوتا از این زیرمجموعه‌ها مثلاً $\{a, b\}$ و $\{c, d\}$، $(a + b) - (c + d)$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است. این دو زیرمجموعه اشتراک ندارند زیرا اگر مثلاً $a = c$، آنگاه $b - d$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است و لذا باقی‌ماندهٔ تقسیم b و d بر ۲۰ برابر است. در صورتی که طبق فرض چنین دو عددی وجود ندارند.

۲۲) تعداد زیرمجموعه‌های S که حداکثر ۶ عضو دارند برابر است با

$$2^{10} - \binom{10}{10} - \binom{10}{9} - \binom{10}{8} - \binom{10}{7} = 848$$

مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها حداقل صفر و حداکثر

$$140 + 139 + 138 + 137 + 136 + 135 = 825$$

است. پس دو زیرمجموعه از S مانند A و B وجود دارند که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است. چنان چه اعضای مشترک A و B را حذف کنیم دو زیرمجموعهٔ مجزا با ویژگی مورد نظر به‌دست می آوریم.

۲۳) فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{15}\}$ و

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{15}$$

هر یک از ۲۸ عدد دنبالهٔ زیر عددی طبیعی نابیشتر از ۲۷ است.

$$a_2, a_3, \ldots, a_{15}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{15} - a_1$$

لذا دوتا از این اعداد برابرند، اما در بین a_i ها و همچنین در بین $a_j - a_1$ ها هیچ دو عددی برابر نیستند، لذا یکی از a_i ها با یکی از $a_j - a_1$ ها برابر است، مثلاً $a_r = a_s - a_1$. پس $a_s = a_r + a_1$.

۲۴) فرض کنید در ۸ سطر صفحهٔ شطرنجی به ترتیب x_1، x_2، ... و x_8 خانهٔ انتخاب شده قرار داشته باشند. در سطر i ام، با فرض $x_i \geq 1$، چپ‌ترین خانهٔ انتخاب شده را در نظر بگیرید. بقیهٔ خانه‌های انتخاب شده در این سطر $x_i - 1$ فاصلهٔ متمایز از این خانه دارند که هر فاصله یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۷ است. چون

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_8 - 1) = 8$$

لذا دو سطر مثلاً سطرهای i ام و j ام وجود دارند که یکی از فاصله‌های سطر i ام با یکی از فاصله‌های سطر j ام برابر است. پس مرکزهای ۴ تا از خانه‌های انتخاب شده رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

۲۵) تعداد پاره‌خط‌های رسم شده برابر $28 = \binom{8}{2}$ است. طول هر یک از این ۲۸ پاره‌خط به صورت $\sqrt{p^2 + q^2}$ است که در آن $1 \leq p \leq q \leq 7$. تعداد زوج‌های (p, q) با این شرایط برابر ۲۸ است و توجه کنید که $5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2$، لذا این ۲۸ پاره‌خط حداکثر ۲۷ طول مختلف دارند. پس طول دوتا از آن‌ها با هم برابر است.

۲۶) فرض کنید اعداد داده شده برابر x_1، x_2، ... و x_7 باشند، در این صورت اعداد صحیح k_1، k_2، ... و k_7 و اعداد حقیقی α_1، α_2، ... و α_7 وجود دارند که برای هر i،

$\pi > \alpha_i \geq \circ$ و $x_i = k\pi + \alpha_i$. بازه $[\circ, \pi)$ را به ٦ بازه به طول $\frac{\pi}{\text{٦}}$ تقسیم می‌کنیم. حداقل دوتا از α_i ها در یکی از این بازه‌ها قرار دارند. حال اگر $|\alpha_r - \alpha_s| < \frac{\pi}{\text{٦}}$، آنگاه $|\sin(x_r - x_s)| < \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$.

۲۷) غیر از وضعیت اولیه ۹۱ وضعیت برای میز وجود دارد. هر فردی که در ابتدا در مقابل او میکروفن وجود دارد در ۹ وضعیت دیگر نیز در مقابل میکروفن قرار می‌گیرد و لذا حداکثر در ۹۰ وضعیت در مقابل حداقل یکی از ۱۰ نفر میکروفن وجود دارد. پس وضعیتی وجود دارد که جلوی هیچ یک از این ۱۰ نفر میکروفن قرار ندارد.

۲۸) کلیهٔ اعداد به صورت $x + y\sqrt{\text{۲}} + z\sqrt{\text{۳}}$ را در نظر بگیرید که x، y و z متعلق به مجموعهٔ $\{\circ, \text{۱}, \ldots, \text{۱}\circ^{\text{٦}} - \text{۱}\}$ باشند. تعداد این اعداد برابر $\text{۱}\circ^{\text{۱۸}}$، کوچکترین این اعداد برابر صفر و بزرگترین این اعداد برابر $(\text{۱}\circ^{\text{٦}} - \text{۱})(\text{۱} + \sqrt{\text{۲}} + \sqrt{\text{۳}})$ است که از $\text{۱}\circ^{\text{۷}}$ کوچکتر است. چنان‌چه بازهٔ $[\circ, \text{۱}\circ^{\text{۷}})$ را به $\text{۱}\circ^{\text{۱۸}}$ بازه به‌طول $\text{۱}\circ^{-\text{۱۱}}$ تقسیم کنیم، حداقل دوتا از اعداد مانند $x_\text{۱} + y_\text{۱}\sqrt{\text{۲}} + z_\text{۱}\sqrt{\text{۳}}$ و $x_\text{۲} + y_\text{۲}\sqrt{\text{۲}} + z_\text{۲}\sqrt{\text{۳}}$ در یک بازه قرار می‌گیرند. پس

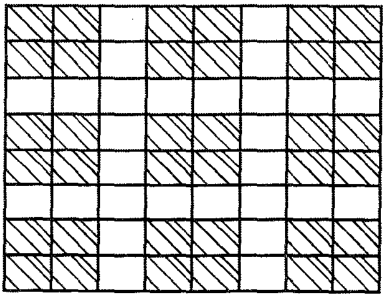
$$|(x_\text{۱} + y_\text{۱}\sqrt{\text{۲}} + z_\text{۱}\sqrt{\text{۳}}) - (x_\text{۲} + y_\text{۲}\sqrt{\text{۲}} + z_\text{۲}\sqrt{\text{۳}})| < \text{۱}\circ^{-\text{۱۱}}$$

فرض کنید $a = x_\text{۱} - x_\text{۲}$، $b = y_\text{۱} - y_\text{۲}$ و $c = z_\text{۱} - z_\text{۲}$. در این صورت a، b و c ویژگی‌های مورد نظر را دارند.

۲۹) اگر دانش‌آموزی در پاسخ به سؤال اول (دوم) عدد k را بگوید، در این صورت هر دانش‌آموز هم اسم (هم فامیل) او نیز در پاسخ به این سؤال عدد k را می‌گوید و لذا حداقل $k + \text{۱}$ پاسخ k در میان پاسخ‌ها وجود دارد. با توجه به فرض مسأله در بین جواب‌ها حداقل یک جواب صفر، دو جواب یک، سه جواب دو، ... و یازده جواب ده وجود دارد و چون $\text{٦٦} = \text{۱۱} + \cdots + \text{۲} + \text{۱}$، پس در بین جواب‌ها دقیقاً یک جواب صفر، دو جواب یک، سه جواب دو، ... و یازده جواب ده وجود دارد. پس اگر در بین

جواب‌های دو نفر عدد برابر وجود داشته باشد، اسم یا فامیل این دو نفر یکسان است. حال یازده نفری را در نظر بگیرید که جواب ۱۰ را داده‌اند. هر یک از این افراد علاوه بر عدد ۱۰ یکی از اعداد ۰، ۱، ... و ۹ را در پاسخ به سؤال دیگر گفته‌اند و لذا دو نفر از آن‌ها یک پاسخ به سؤال دیگر داده‌اند. این دو نفر هم اسم و هم فامیل یکسان دارند.

۳۰) هر مربع ۲ × ۲ که از صفحهٔ شطرنجی جدا شود حداکثر به یکی از مربع‌های هاشورخورده در شکل زیر لطمه وارد می‌کند. لذا اگر ۸ مربع ۲ × ۲ جدا شود حداقل یکی از مربع‌های هاشورخورده دست‌نخورده باقی می‌ماند.



۳۱) تعداد اعداد به صورت $x+v$ که $x \in A$ و $v \in B$ برابر $|A||B|$ است. هر یک از این اعداد برابر یکی از ۲، ۳، ... و ۴۰۰۰ هستند. اگر دوتا از این اعداد مثلاً $x+v$ و $y+u$ برابر باشند، آنگاه $x-y=u-v$ و حکم ثابت می‌شود. پس فرض کنید هیچ دوتا از $x+v$ ها برابر نباشند. چون $|A||B| \geq ۳۹۹۹$ و تعداد اعداد ۲، ۳، ... و ۴۰۰۰ برابر ۳۹۹۹ است، نتیجه می‌گیریم یکی از $x+v$ ها برابر ۲ و یکی برابر ۴۰۰۰ است، پس A و B هر دو شامل اعداد ۱ و ۲۰۰۰ هستند و لذا در بین $x+v$ ها هم ۱ + ۲۰۰۰ و هم ۲۰۰۰ + ۱ وجود دارد، در صورتی که طبق فرض چنین دو عددی وجود ندارند. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

۳۲) خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به ۱۶ دسته همانند شکل زیر تقسیم می‌کنیم.

۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱
۸	۷	٦	۵	۸	۷	٦	۵
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۹
۱٦	۱۵	۱۴	۱۳	۱٦	۱۵	۱۴	۱۳
۴	۳	۲	۱	۴	۳	۲	۱
۸	۷	٦	۵	۸	۷	٦	۵
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۹
۱٦	۱۵	۱۴	۱۳	۱٦	۱۵	۱۴	۱۳

ویژگی ۴ خانهٔ هر دسته این است که برای رفتن از یکی از خانه‌های این دسته به هر خانهٔ دیگر از آن با مهرهٔ اسب حداقل سه حرکت نیاز است.

۳۳) خانه‌های صفحهٔ ۱۰×۱۰ را به ۲۵ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم. در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰، ۲۵ عدد به صورت $۴k$، ۲۵ عدد به صورت $۴k + ۱$، ۲۵ عدد به صورت $۴k + ۲$ و ۲۵ عدد به صورت $۴k + ۳$ هستند. اگر دو عدد به صورت $۴k$ یا دو عدد به صورت $۴k + ۲$ در یکی از مربع‌های ۲×۲ قرار داشته باشند مسأله حل است و الا در هر یک از این مربع‌های ۲×۲ یک عدد به صورت $۴k$ و یک عدد به صورت $۴k + ۲$ وجود دارد. پس دو خانه از هر یک از این مربع‌ها باقی می‌ماند. اگر در یکی از این مربع‌ها یک عدد به صورت $۴k + ۱$ و یک عدد به صورت $۴k + ۳$ وجود داشته باشد مسأله حل است و الا در هر یک از این مربع‌های ۲×۲ یا دو عدد به صورت $۴k + ۱$ وجود دارد یا هیچ عدد به این صورت وجود ندارد. نتیجه می‌گیریم تعداد اعداد به صورت $۴k + ۱$ باید زوج باشد که این گونه نیست.

۳۴) فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{۱۰۲۴}$ زیرمجموعه‌های X باشند. در بین ۱۰۲۴ عدد

$$\pi(A_۱), \pi(A_۲), \ldots, \pi(A_{۱۰۲۴})$$

دو عدد وجود دارند که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۱۰۰۰ برابر است و لذا تفاضل آن‌ها بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۳۵) الف) هر یک از ۱۷ عدد به صورت $۲^{a_۱} \times ۳^{a_۲} \times ۵^{a_۳} \times ۷^{a_۴}$ هستند. این ۱۷ عدد را بر اساس زوجیت اعداد $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ دسته‌بندی می‌کنیم. چون هر یک از $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ به لحاظ زوجیت دو حالت دارند، لذا ۱۷ عدد به حداکثر ۱۶ دسته تقسیم می‌شوند. پس دو عدد مانند $۲^{a_۱} \times ۳^{a_۲} \times ۵^{a_۳} \times ۷^{a_۴}$ و $۲^{b_۱} \times ۳^{b_۲} \times ۵^{b_۳} \times ۷^{b_۴}$ وجود دارند که در یک دسته قرار می‌گیرند، پس برای هر i، زوجیت a_i و b_i یکسان است و لذا حاصل‌ضرب این دو عدد مربع کامل است.

ب) طبق قسمت (الف) در بین هر ۱۷ تا از این ۴۹ عدد حاصل‌ضرب دوتا مربع کامل است. ابتدا دو عدد مانند $x_۱$ و $y_۱$ وجود دارند دارند که $x_۱y_۱ = z_۱^۲$، سپس در بین ۴۷ عدد باقی‌مانده دو عدد مانند $x_۲$ و $y_۲$ وجود دارند که $x_۲y_۲ = z_۲^۲$، سپس در بین ۴۵ عدد باقی‌مانده دو عدد مانند $x_۳$ و $y_۳$ وجود دارند که $x_۳y_۳ = z_۳^۲$، ...، سپس در بین ۱۷ عدد باقی‌مانده دو عدد مانند $x_{۱۷}$ و $y_{۱۷}$ وجود دارند که $x_{۱۷}y_{۱۷} = z_{۱۷}^۲$.
چون $x_۱$، ...، $x_{۱۷}$، $y_۱$، ... و $y_{۱۷}$ بر هیچ عدد اولی غیر از ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نیستند، پس $z_۱$، ... و $z_{۱۷}$ نیز بر هیچ عدد اولی غیر از ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نیستند و لذا طبق قسمت (الف) حاصل‌ضرب دوتا از آن‌ها مثلاً z_i و z_j مربع کامل است، پس $z_iz_j = z^۲$. در نتیجه

$$x_iy_ix_jy_j = z_i^۲z_j^۲ = z^۴$$

۳۶) تعداد تفاضل‌های دوبه‌دوی ۹ عدد برابر $۳۶ = \binom{۹}{۲}$ است که حداکثر ۳۵ مقدار مختلف می‌پذیرند. پس حداقل دوتا از تفاضل‌ها با هم برابرند.

۳۷) ۱۰۱ زوج مرتب

$$(a_۱, a_۲), (a_۲, a_۳), (a_۳, a_۴), \ldots, (a_{۱۰۱}, a_{۱۰۲})$$

را در نظر بگیرید. چون ۱۰۰ زوج مرتب از اعداد ۱ تا ۱۰ وجود دارد، پس حداقل دوتا از ۱۰۱ زوج مرتب فوق برابرند. مثلاً

$$(a_i, a_{i+1}) = (a_j, a_{j+1})$$

و لذا $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$.

۳۸) در جدول ۱۰ × ۱۰، ۸۱ مربع ۲ × ۲ وجود دارد که مجموع اعداد واقع در هر یک، یکی از اعداد ۴، ۵، ... و ۸۰ است. پس دو مربع ۲ × ۲ وجود دارند که مجموع اعداد واقع در آن‌ها برابرند.

۳۹) در جدول ۱۶ × ۱۶، ۲۲۵ مربع ۲ × ۲ وجود دارد. چون تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \cdots + x_7 = 4$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $210 = \binom{10}{6}$ است، لذا دو مربع ۲ × ۲ وجود دارند که برای هر i، تعداد خانه‌های شامل عدد i در دو مربع برابرند.

۴۰) اضلاع و اقطار یک n ضلعی منتظم در n راستای مختلف قرار دارند. پس $36 = \binom{9}{2}$ پاره‌خط رسم شده حداکثر ۳۵ راستای مختلف قرار دارند و لذا دوتا از آن‌ها موازی‌اند.

۴۱) هر مقسوم‌علیه مثبت از 60^9 به صورت $2^a \times 3^b \times 5^c$ است که $0 \le a \le 18$، $0 \le b \le 9$ و $0 \le c \le 9$. چون b و c جمعاً ۱۰۰ حالت مختلف دارند، لذا در بین ۱۰۱ مقسوم‌علیه دوتا وجود دارند که توان ۳ و همچنین توان ۵ در آن‌ها برابر است. یکی از این دو عدد بر دیگری بخش‌پذیر است.

۴۲) ب) طبق (الف) در بین ۷ عدد دو عدد a_1 و b_1 وجود دارند که $a_1 + b_1 = 2c_1$. حال در بین ۵ عدد باقی‌مانده دو عدد a_2 و b_2 وجود دارند که $a_2 + b_2 = 2c_2$ و نهایتاً در بین ۳ عدد باقی‌مانده دو عدد a_3 و b_3 وجود دارند که $a_3 + b_3 = 2c_3$. حال

در بین $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ مجموع دوتا عددی زوج است، مثلاً $c_۱ + c_۲ = ۲d$، پس

$$a_۱ + b_۱ + a_۲ + b_۲ = ۲c_۱ + ۲c_۲ = ۴d$$

بخش ۷–۲

۱) بازهٔ $[۱۵, ۲۰)$ را به ۵۰ بازهٔ به طول ۰٫۱ تقسیم می‌کنیم. در این صورت در بین دانش‌آموزان حداقل ۹ نفر وجود دارند که معدل‌های آن‌ها در یکی از این ۵۰ بازه قرار دارد.

۲) ۱۲ روز را به ۴ تا سه روز تقسیم می‌کنیم، روزهای اول تا سوم، روزهای چهارم تا ششم، روزهای هفتم تا نهم و سه روز آخر. حال در یکی از این سه روزها حداقل $۲۵ = \lceil \frac{۹۷}{۴} \rceil$ سکه داخل قلک انداخته شده است.

۳) مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۱۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۴}$ تقسیم کنید.

۴) بازیکنی مانند x وجود دارد که حداقل در $۲۹ = \lceil \frac{۶۰\times۱۱}{۲۳} \rceil$ بازی درون زمین بوده است. در هر یک از این ۲۹ مسابقه غیر از x، ۱۰ نفر دیگر نیز در زمین بوده‌اند، پس فردی مانند y وجود دارد که حداقل در $۱۴ = \lceil \frac{۲۹\times۱۰}{۲۲} \rceil$ تا از این ۲۹ مسابقه درون زمین بوده است. در هر یک از این ۱۴ مسابقه غیر از x و y، ۹ نفر دیگر نیز در زمین بوده‌اند، پس فردی مانند z وجود دارد که حداقل در $۶ = \lceil \frac{۱۴\times۹}{۲۱} \rceil$ تا از این ۱۴ مسابقه درون زمین بوده است.

۵) تعداد تفاضل‌های دوبه‌دوی این ۱۱ عدد برابر $۵۵ = \binom{۱۱}{۲}$ است. در بین این ۵۵ تفاضل حداکثر یکی برابر ۱۹ و حداکثر دوتا برابر ۱۸ هستند و لذا حداقل ۵۲ تا از آن‌ها عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۷\}$ هستند. پس حداقل ۴ تا از آن‌ها برابرند.

۶) افراد جمع را برحسب تعداد دوستانشان در این جمع دسته‌بندی می‌کنیم. با توجه به این که هر فرد در این جمع ۱، ۳، ۵، ... یا ۱۹ دوست دارد، پس افراد این جمع

به ۱۰ دسته تقسیم می‌شوند. اگر در هیچ دسته‌ای تعداد افراد از ۲ بیشتر نباشد، در این صورت در هر دسته دقیقاً دو نفر قرار می‌گیرند. اما اگر دو نفر در این جمع ۱۹ دوست داشته باشند، آنگاه هر فرد دیگر حداقل دو دوست دارد و لذا نمی‌توان فردی پیدا کرد که یک دوست داشته باشد. پس دسته‌ای وجود دارد که حداقل سه نفر در آن قرار دارند.

۷) خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به ۱۶ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم. چون ۳۳ خانهٔ قرمز وجود دارد، لذا مربعی ۲×۲ وجود دارد که حداقل $۳ = \lceil \frac{۳۳}{۱۶} \rceil$ خانه از آن قرمزند.

۸) چون در هر بازی دو تیم حضور دارند، لذا در ۲۳ بازی در مجموع ۴۶ تیم حضور داشته‌اند و چون کلاً ۱۵ تیم وجود دارد پس تیمی وجود دارد که حداقل در $۴ = \lceil \frac{۴۶}{۱۵} \rceil$ بازی حضور داشته است.

۹) فرض کنید m کوچکترین و M بزرگترین عدد جدول باشد. خانه‌های شامل دو عدد m و M را در نظر بگیرید. بین این دو خانه مسیری را می‌گیریم که قطعهٔ اول آن افقی و قطعهٔ دوم آن عمودی باشد. تعداد خانه‌های روی این مسیر حداکثر برابر ۱۹ است. چون اعداد واقع در خانه‌های مجاور ضلعی حداکثر یک واحد اختلاف دارند، پس اعداد واقع در دو انتهای این مسیر حداکثر ۱۸ واحد اختلاف دارند، یعنی $M - m \leq ۱۸$. پس در جدول حداکثر ۱۹ عدد مختلف وجود دارد و لذا حداقل ۶ تا از اعداد جدول برابرند.

۱۰) خانه‌های شامل اعداد ۱ و ۱۰۰ و مسیری بین این دو خانه را در نظر بگیرید که تعداد خانه‌های واقع در این مسیر کمترین مقدار ممکن را داشته باشد و خانه‌های مجاور در این مسیر حداقل یک رأس مشترک داشته باشند. تعداد خانه‌های این مسیر حداکثر برابر ۱۰ است. چون اختلاف اعداد واقع در خانه‌های ابتدا و انتهای مسیر برابر ۹۹ است، لذا در هنگام طی مسیر دو خانهٔ مجاور وجود دارند که اختلاف اعداد واقع در آن‌ها حداقل ۱۱ است.

۱۱) همانند راه‌حل مسألهٔ ۶.۲.۷ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به ۸ دسته تقسیم می‌کنیم. حال ۵۷ عدد مختلف در ۸ دسته قرار دارند، لذا دسته‌ای وجود دارد که حداقل $\lceil \frac{۵۷}{۸} \rceil = ۸$ عدد مختلف در آن قرار دارند.

۱۲) دو نسخه از ۱۰۰ ضلعی را در نظر گرفته یکی را ثابت و دیگری را روی آن می‌چرخانیم. ۱۰۰ وضعیت مختلف پدید می‌آید. در این ۱۰۰ وضعیت در مجموع $۳۵ \times ۶۵ = ۲۲۷۵$ بار رأس‌های قرمز روی رأس‌های آبی قرار می‌گیرند. پس وضعیتی وجود دارد که حداقل ۲۳ رأس قرمز روی رأس‌های آبی قرار می‌گیرند. لذا در ۱۰۰ ضلعی دو ۲۳ ضلعی قابل انطباق وجود دارند که رأس‌های یکی قرمز و رأس‌های دیگری آبی است.

۱۳) در مجموع ۴۰ بار عمل حل مسأله انجام شده است. اگر فردی مانند A وجود داشته باشد که ۶ مسأله را حل کرده باشد، در این صورت دو مسأله باقی‌مانده جمعاً توسط ۱۰ نفر حل شده‌اند و لذا فردی وجود دارد که این دو مسأله را حل کرده است. اگر A وجود نداشته باشد، در این صورت هر فرد دقیقاً ۵ مسأله را حل کرده است. فردی مانند B در نظر بگیرید. ۳ مسأله‌ای را که B حل نکرده است جمعاً توسط ۱۵ نفر حل شده‌اند و چون غیر از B، ۷ نفر وجود دارد پس فردی وجود دارد که $\lceil \frac{۱۵}{۷} \rceil = ۳$ تا از این ۳ مسأله را حل کرده است. پس دو نفر وجود دارند که هر مسأله توسط حداقل یکی حل شده است.

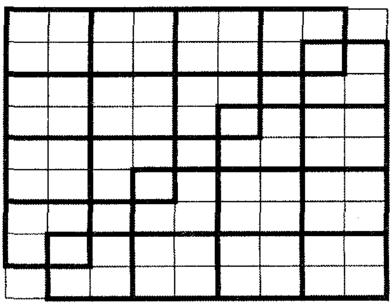
۱۴) مشابه راه حل مسألهٔ ۱۱.۲.۷ عمل کنید.

۱۵) فرض کنید نقطهٔ A بالاترین نقطه در بین ۲۱۲ نقطه باشد. اگر فاصله‌های بقیهٔ نقاط از A حداکثر ۱۴ مقدار مختلف داشته باشند، در این صورت بقیهٔ نقاط روی حداکثر ۱۴ نیم‌دایره به مرکز A قرار دارند. پس نیم دایره‌ای وجود دارد که حداقل $\lceil \frac{۲۱۱}{۱۴} \rceil = ۱۶$ تا از نقاط روی آن قرار دارند. چپ‌ترین نقطه بین این ۱۶ نقطه را در

نظر بگیرید. هیچ دوتا از ۱۵ نقطهٔ دیگر از این نقطه به یک فاصله نیستند. لذا در بین فاصله‌های بین دوبه‌دوی نقاط حداقل ۱۵ عدد متمایز وجود دارد.

۱۶) یک نقطه مانند A در نظر بگیرید. اگر حکم درست نباشد، بقیهٔ نقاط روی حداکثر ۷۸ کره به مرکز A قرار دارند و لذا یکی از این کره‌ها حداقل $۱۲۸۲۱ = \lceil \frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۷۸} \rceil$ تا از نقاط را شامل است. حال یکی از این ۱۲۸۲۱ نقطه مانند B را در نظر بگیرید. بقیهٔ ۱۲۸۲۰ نقطه روی حداکثر ۷۸ کره به مرکز B قرار دارند و لذا یکی از این کره‌ها حداقل $۱۶۵ = \lceil \frac{۱۲۸۲۰}{۷۸} \rceil$ تا از این نقاط را شامل است. پس ۱۶۵ نقطه روی دو کره یکی به مرکز A و یکی به مرکز B قرار دارند و لذا این نقاط روی اشتراک دو کره یعنی روی یک دایره قرار دارند. حال این دایره را به دو نیم دایره تقسیم می‌کنیم. روی یکی از این دو نیم دایره حداقل $۸۳ = \lceil \frac{۱۶۵}{۲} \rceil$ نقطه قرار دارد و لذا در بین فاصله‌های بین دوبه‌دوی این ۸۳ نقطه حداقل ۸۲ عدد متمایز وجود دارد. تناقض حاصل حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۱۷) ۲۰ مربع ۲×۲ مانند شکل زیر در صفحهٔ شطرنجی در نظر می‌گیریم. این مربع‌ها ۵ خانه (که همگی روی قطر قرار دارند) از صفحهٔ شطرنجی را نمی‌پوشانند. لذا حداقل ۴۱ خانهٔ قرمز در این ۲۰ مربع وجود دارد. پس مربعی ۲×۲ وجود دارد که حداقل $۳ = \lceil \frac{۴۱}{۲۰} \rceil$ خانهٔ قرمز در آن قرار دارند.



۱۸) مشابه مسألهٔ ۱۵.۲.۷ عمل کنید.

۱۹) یکی از مجموعه‌ها مانند $A_{\circ}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A_{۱}$، $A_{۲}$، ... و $A_{۹۹}$ بقیهٔ مجموعه‌ها باشند. طبق فرض $A_{\circ}$ و A_i دقیقاً یک عضو مشترک دارند. فرض کنید x_i عضو مشترک $A_{\circ}$ و A_i باشد. چون $A_{\circ}$، ۱۰ عضو دارد و $x_{۱}$، $x_{۲}$، ... و $x_{۹۹}$ اعضای $A_{\circ}$ هستند، پس حداقل $۱۰ = \lceil \frac{۹۹}{۱۰} \rceil$ تا از x_i ها برابرند، پس عضوی وجود دارد که علاوه بر $A_{\circ}$ در ۱۰ تا از A_i ها آمده است. مثلاً فرض کنید عضو x در $A_{\circ}$، $A_{۱}$، ... و $A_{۱۰}$ آمده باشد. ثابت می‌کنیم x در همهٔ A_i ها آمده است. فرض کنید عضو مشترک $A_{۱۱}$ با $A_{\circ}$، $A_{۱}$، ... و $A_{۱۰}$ به ترتیب $y_{\circ}$، $y_{۱}$، ... و $y_{۱۰}$ باشد. این ۱۱ عضو همگی به $A_{۱۱}$ تعلق دارند. چون $A_{۱۱}$، ۱۰ عضو دارد، پس حداقل دوتا از y_i ها برابرند، مثلاً $y_r = y_s$. چون x تنها عضو مشترک A_r و A_s است، y_r عضو A_r و y_s عضو A_s است، پس $x = y_r = y_s$ و لذا x به $A_{۱۱}$ نیز تعلق دارد.

۲۰) فرض کنید باقی‌مانده‌های تقسیم ۱۰۰ عدد داده شده بر ۱۰۰ حداکثر ۱۰ مقدار مختلف داشته باشند. در این صورت باقی‌مانده‌های تقسیم تفاضل‌های دوبه‌دوی این اعداد بر ۱۰۰ حداکثر ۹۱ مقدار مختلف دارند (یک باقی‌ماندهٔ صفر و حداکثر ۱۰×۹ باقی‌ماندهٔ ناصفر). اما با توجه به این که

$$(a_{۱} + \cdots + a_i) - (a_{۱} + \cdots + a_{i-۱}) = a_i$$

و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد $a_{۲}$، $a_{۳}$، ... و $a_{۱۰۰}$ بر ۱۰۰ متمایزند نتیجه می‌گیریم در بین باقی‌مانده‌های تقسیم تفاضل‌های دوبه‌دوی ۱۰۰ عدد داده شده حداقل ۹۹ عدد متمایز وجود دارد.

۲۱) فرض کنید $a = (r-۱)n + ۱$ و $b = \binom{a}{r}n(s-۱) + ۱$. a خط افقی و b خط عمودی در نظر بگیرید. روی هر خط عمودی a نقطهٔ تقاطع ایجاد می‌شود و چون این a نقطه با n رنگ رنگ شده‌اند، پس حداقل $r = \lceil \frac{a}{n} \rceil$ تا از این نقاط همرنگ‌اند. حال r نقطهٔ همرنگ را روی هر یک از این خطوط عمودی در نظر می‌گیریم. این

مجموعه‌های r تایی به لحاظ رنگ و موقعیت حداکثر $n\binom{a}{r}$ حالت مختلف دارند و لذا حداقل $s = \lceil \frac{b}{n\binom{a}{r}} \rceil$ تا از این مجموعه‌های r تایی هم به لحاظ رنگ و هم به لحاظ موقعیت یکسانند، یعنی r خط افقی و s خط عمودی وجود دارد که rs نقطهٔ محل تقاطع آن‌ها همرنگ‌اند.

۲۲) یک دایره در صفحه و $a = (m - ۱)n + ۱$ نقطه روی این دایره در نظر می‌گیریم. بی‌نهایت نسخه از این دایره را در صفحه رسم می‌کنیم. در هر دایره حداقل $m = \lceil \frac{a}{n} \rceil$ تا از a نقطه همرنگ‌اند. m نقطهٔ همرنگ از هر دایره را در نظر می‌گیریم. m نقطهٔ همرنگ از یک دایره به لحاظ رنگ و موقعیت حداکثر $n\binom{a}{m}$ حالت مختلف دارند، لذا در تعداد بی‌شماری از دایره‌ها m نقطهٔ همرنگ هم به لحاظ رنگ و هم به لحاظ موقعیت وضعیت یکسانی دارند.

۲۳) در صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰، ۹ نوار ۱۰ × ۲ وجود دارد. هر موزاییک ۲ × ۲ در یکی از این ۹ نوار قرار دارد. پس نواری وجود دارد که حداقل $۷ = \lceil \frac{۵۵}{۹} \rceil$ تا از موزاییک‌های ۲ × ۲ در آن قرار دارند. چنان‌چه ضلع سمت چپ این ۷ موزاییک را در نظر بگیریم یا دوتا از آن‌ها بر هم منطبق‌اند و یا سه‌تا وجود دارند که به ترتیب به فاصله ۱ از یکدیگر قرار دارند. در هر دو صورت حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۲۴) تمام مثلث‌های به ضلع واحد را در نظر بگیرید که با مثلث اصلی هم جهت هستند. تعداد این مثلث‌ها برابر ۵۵ است و هر ضلع از یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد دقیقاً در یکی از این مثلث‌ها آمده است. چون ۱۱۱ تا از این اضلاع به رنگ قرمز در آمده‌اند، لذا حداقل $۳ = \lceil \frac{۱۱۱}{۵۵} \rceil$ تا از این پاره‌خط‌ها در یکی از ۵۵ مثلث قرار دارند.

۲۵) افراد حاضر در جمع را برحسب اسم دسته‌بندی می‌کنیم. چون در بین هر ۱۰ نفر حداقل ۳ نفر اسم یکسان دارند، لذا افراد جمع حداکثر به ۸ دسته تقسیم می‌شوند و همچنین حداکثر در ۴ دسته بیش از یک نفر قرار دارند. اگر در هر دسته حداکثر ۱۴ نفر

قرار داشته باشند، نتیجه می‌گیریم حداکثر ۵٦ نفر در دسته‌هایی قرار دارند که بیش از یک نفر در آن‌ها قرار دارند. پس باید ۴ دستهٔ یک نفره و ۴ دستهٔ ۱۴ نفره وجود داشته باشد که در این صورت به سادگی می‌توان ۱۰ نفر پیدا کرد که هیچ سه‌تا در یک دسته نباشند. پس دسته‌ای وجود دارد که حداقل ۱۵ نفر در آن قرار دارند.

۲٦) فرض کنید A یکی از رأس‌های ۱۷ ضلعی باشد. از A، ۱٦ پاره‌خط به رأس‌های دیگر ۱۷ ضلعی خارج می‌شود. حداقل $۶ = \lceil \frac{۱۶}{۳} \rceil$ تا از این پاره‌خط‌ها همرنگ‌اند، مثلاً فرض کنید AB_1، ... و AB_6 به رنگ آبی باشند. اگر یکی از پاره‌خط‌های بین رأس‌های B_1، ... و B_6 به رنگ آبی باشد حکم مسأله نتیجه می‌شود و الا همهٔ پاره‌خط‌های بین این ٦ نقطه به رنگ سبز یا قرمز هستند. حال بنا به مسألهٔ ۱٦.۲.۷ حکم نتیجه می‌شود.

۲۷) فرض کنید A یکی از رأس‌های ۱۰ ضلعی باشد. از A، ۹ پاره‌خط به رأس‌های دیگر ۱۰ ضلعی خارج می‌شود. ابتدا فرض کنید ۴ تا از این پاره‌خط‌ها، مثلاً AB_1، ... و AB_4 به رنگ آبی باشند. اگر یکی از پاره‌خط‌های بین رأس‌های B_1، ... و B_4 به رنگ آبی باشد حکم مسأله نتیجه می‌شود و الا همهٔ پاره‌خط‌های بین این چهار رأس قرمزند که در این صورت نیز حکم مسأله نتیجه می‌شود. پس فرض کنید حداکثر ۳ تا از پاره‌خط‌های متصل به A به رنگ آبی باشند و لذا حداقل ٦ تا از پاره‌خط‌های متصل به A، مثلاً AC_1، ... و AC_6 به رنگ قرمزند. طبق مسألهٔ ۱٦.۲.۷ پاره‌خط‌های بین ۳ رأس از C_1، ... و C_6 مثلاً C_i، C_j و C_k همرنگ‌اند. اگر پاره‌خط‌های بین این ۳ رأس آبی باشند حکم مسأله نتیجه می‌شود و در غیر این صورت پاره‌خط‌های بین رأس‌های A، C_i، C_j و C_k به رنگ قرمزند و در این حالت نیز حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۲۸) اضلاع و اقطار ۲۴ ضلعی منتظم در ۲۴ راستای مختلف قرار دارند، پس در بین ۴۹ پاره‌خط حداقل $۳ = \lceil \frac{۴۹}{۲۴} \rceil$ پاره‌خط در یک راستا قرار دارند.

۲۹) رأس‌های ۳۰ ضلعی منتظم را می‌توانیم به ٦ دسته تقسیم کنیم به‌طوری‌که رأس‌های هر دسته تشکیل یک ۵ ضلعی منتظم بدهند (مثلاً اگر رأس‌ها را به ترتیب با ۱، ۲، ...و ۳۰ نام‌گذاری کنیم، رأس‌های ۱، ۷، ۱۳، ۱۹ و ۲۵ رأس‌های یک ۵ ضلعی منتظم هستند). حال از ۱۳ رأس قرمز حداقل $۳ = \lceil \frac{۱۳}{٦} \rceil$ رأس متعلق به یکی از ٦ دسته هستند. به سادگی می‌توانید ببینید که هر ۳ رأس از یک ۵ ضلعی منتظم رأس‌های یک مثلث متساوی‌الساقین هستند.

۳۰) الف) اگر در بین ۵ عدد داده شده یک عدد به صورت $۳k$، یک عدد به صورت $۳k + ۱$ و یک عدد به صورت $۳k + ۲$ وجود داشته باشد حکم مسأله نتیجه می‌شود و الا باقی‌مانده‌های تقسیم ۵ عدد بر ۳ حداکثر دو مقدار مختلف دارند و لذا حداقل ۳ تا از ۵ عدد در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ یکسان دارند. مجموع این ۳ عدد بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) طبق قسمت (الف) اعداد $a_۱$، $b_۱$ و $c_۱$ وجود دارند که $a_۱ + b_۱ + c_۱ = ۳d_۱$. مجدداً طبق قسمت (الف) در بین ۸ عدد باقی‌مانده اعداد $a_۲$، $b_۲$ و $c_۲$ وجود دارند که $a_۲ + b_۲ + c_۲ = ۳d_۲$ و نهایتاً در بین ۵ عدد باقی‌مانده اعداد $a_۳$، $b_۳$ و $c_۳$ وجود دارند که $a_۳ + b_۳ + c_۳ = ۳d_۳$. حال در بین $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ دو عدد وجود دارد که مجموع آن‌ها زوج است، مثلاً $d_۱ + d_۲ = ۲e$. پس

$$a_۱ + b_۱ + c_۱ + a_۲ + b_۲ + c_۲ = ۳d_۱ + ۳d_۲ = ٦e$$

۳۱) فرض کنید $(x_۱, y_۱)$، ... و $(x_{۱۳}, y_{۱۳})$ نقاط داده شده باشند. در بین $x_۱$، ...و $x_{۱۳}$ حداقل $۵ = \lceil \frac{۱۳}{۳} \rceil$ عدد در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ یکسان دارند، مثلاً فرض کنید $x_۱$، ... و $x_۵$ این گونه باشند. طبق مسألهٔ قبل مجموع ۳ تا از ۵ عدد $y_۱$، ... و $y_۵$ بر ۳

بخش‌پذیر است. مثلاً فرض کنید $y_۳ + y_۲ + y_۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. حال مرکز ثقل مثلث با رئوس $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

۳۲) بازیکنان را برحسب تعداد بازی‌هایی که انجام داده‌اند دسته‌بندی می‌کنیم. طبق فرض بازیکنان به ۵ دسته تقسیم می‌شوند. اگر در هیچ دسته‌ای ۴ بازیکن وجود نداشته باشد، در این صورت در هر دسته دقیقاً ۳ بازیکن قرار دارند. اما در این حالت مجموع تعداد بازی‌های بازیکنان برابر

$$۳(۳ + ۴ + ۵ + ۷ + ۸) = ۸۱$$

می‌شود، در صورتی که این مجموع باید عددی زوج باشد.

۳۳) فرض کنید A یکی از ۱۵ نقطه باشد. اگر فاصلهٔ هر نقطهٔ دیگر از A کمتر از یک متر باشد حکم مسأله نتیجه می‌شود، پس فرض کنید فاصلهٔ نقطهٔ B از A بیش از یک متر باشد. به مرکز هر یک از A و B دایره‌ای به شعاع یک متر رسم می‌کنیم. طبق فرض هر یک از ۱۳ نقطهٔ باقی‌مانده در یکی از این دو دایره قرار دارند، پس یکی از این دو دایره حداقل $۷ = \lceil \frac{۱۳}{۲} \rceil$ تا از این ۱۳ نقطه را دارد و حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۳۴) فرض کنید x_i یک عضو از $A_i \cap A_{۲۵}$ باشد، $۱ \leq i \leq ۲۴$. $x_۱$، ... و $x_{۲۴}$ همگی عضو $A_{۲۵}$ هستند. اگر ۷ تا از x_i ها برابر باشند، آنگاه عضوی از $A_{۲۵}$ در ۷ تای دیگر از A_i ها آمده است و حکم نتیجه می‌شود. اگر در بین $x_۱$، ... و $x_{۲۴}$، ۷ عضو برابر وجود نداشته باشد، در این صورت با توجه به این که این ۲۴ عضو حداکثر ۴ مقدار مختلف دارند، نتیجه می‌گیریم هر عضو $A_{۲۵}$ دقیقاً در ٦ تای دیگر از A_i ها آمده است. با استدلال مشابه نتیجه می‌گیریم که اگر حکم درست نباشد، آنگاه هر عضو $\bigcup_{i=۱}^{۲۵} A_i$ دقیقاً در ۷ تا از A_i ها آمده است. پس اگر $\bigcup_{i=۱}^{۲۵} A_i$، k عضو داشته باشد، آنگاه $۷k = ۴ \times ۲۵$ و لذا k عددی صحیح نیست. تناقض حاصل حکم مسأله را نتیجه می‌دهد.

۳۵) خانهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم جدول را حذف کنید. به سادگی می‌توانید خانه‌های باقی‌مانده را با ۲۱ موزاییک ۳×۱ بپوشانید. پس حداقل ۴۳ خانه از این ۲۱ موزاییک به رنگ قرمزند و لذا موزاییکی وجود دارد که حداقل $۳ = \lceil \frac{۴۳}{۲۱} \rceil$ تا از خانه‌های آن به رنگ قرمزند.

۳۶) خانهٔ وسط جدول را حذف کنید. به سادگی می‌توانید خانه‌های باقی‌مانده را با ۸ موزاییک ۳×۲ بپوشانید. پس حداقل ۲۵ خانه از این ۸ موزاییک به رنگ قرمزند و لذا موزاییکی وجود دارد که حداقل $۴ = \lceil \frac{۲۵}{۸} \rceil$ تا از خانه‌های آن به رنگ قرمزند.

۳۷) هر $۲k$ ضلعی محدب، $k(۲k - ۳)$ قطر دارد. اگر هر قطر با یکی از اضلاع موازی باشد، آنگاه حداقل $\lceil \frac{k(۲k-۳)}{۲k} \rceil = k - ۱$ تا از قطرها با یکی از اضلاع موازی‌اند. اما در یک $۲k$ ضلعی هر ضلع حداکثر با $k - ۲$ تا از قطرها می‌تواند موازی باشد.

۳۸) دوتا از ماهواره‌ها و صفحه‌ای را که از مرکز سیاره و این دو ماهواره می‌گذرد در نظر بگیرید. فرض کنید AB قطری از سیاره باشد که بر این صفحه عمود است. در این صورت هیچ یک از دو ماهواره از نقاط A و B دیده نمی‌شوند و در ضمن هر ماهواره از حداقل یکی از نقاط A و B قابل رؤیت نیست. پس حداقل ۲۰ ماهواره از یکی از نقاط A و B قابل رؤیت نیستند.

فصل ۸

بخش ۸ـ۱

۱) مشابه مسألهٔ ۲.۱.۸ عمل کنید.

۲) اگر حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، آنگاه

$$\frac{m!}{۰!} + \frac{(m+۱)!}{۱!} + \cdots + \frac{(m+k)!}{k!} = \frac{(m+k+۱)!}{(m+۱)k!}$$

در نتیجه

$$\frac{m!}{۰!}+\frac{(m+۱)!}{۱!}+\cdots+\frac{(m+k+۱)!}{(k+۱)!} = \frac{(m+k+۱)!}{(m+۱)k!}+\frac{(m+k+۱)!}{(k+۱)!}$$
$$= \frac{(m+k+۱)!}{(m+۱)(k+۱)!}((k+۱)+(m+۱))$$
$$= \frac{(m+k+۲)!}{(m+۱)(k+۱)!}$$

و لذا حکم به‌ازای $n=k+۱$ نیز درست است.

۳) مشابه مسألهٔ ۳.۱.۸ عمل کنید.

۴) فرض کنید $۲^{۳^k}+۱=۳^{k+۱}t$، در این صورت

$$\begin{aligned} ۲^{۳^{k+۱}}+۱ &= (۲^{۳^k})^۳+۱ \\ &= (۳^{k+۱}t-۱)^۳+۱ \\ &= ۳^{۳k+۳}t^۳-۳^{۲k+۳}t^۲+۳^{k+۲}t \\ &= ۳^{k+۲}t' \end{aligned}$$

لذا اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+۱$ نیز درست است.

۵) فرض کنید $۵^{۲k+۱}-۳\times ۸^{k+۲}=۱۷t$، در این صورت

$$\begin{aligned} ۵^{۲k+۳}-۳\times ۸^{k+۳} &= ۲۵\times ۵^{۲k+۱}-۲۴\times ۸^{k+۲} \\ &= ۲۵(۱۷t+۳\times ۸^{k+۲})-۲۴\times ۸^{k+۲} \\ &= ۲۵\times ۱۷t+۵۱\times ۸^{k+۲}=۱۷t' \end{aligned}$$

پس اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+۱$ نیز درست است.

۶) فرض کنید $k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳=۹t$، در این صورت

$$\begin{aligned} (k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k+۳)^۳ &= (k+۱)^۳+(k+۲)^۳+k^۳ \\ &\quad +۹k^۲+۲۷k+۲۷ \\ &= ۹t+۹k^۲+۲۷k+۲۷=۹t' \end{aligned}$$

پس اگر حکم به‌ازای k درست باشد، آنگاه به‌ازای $k+۱$ نیز درست است.

۷) فرض کنید $k \geq ۳$ و $۳^k \geq k^۳$، در این صورت $۳^{k+۱} \geq ۳k^۳$. از طرفی

$$۳k^۳ - (k+۱)^۳ = ۲k^۳ - ۳k^۲ - ۳k - ۱ = (k^۳ - ۳k^۲) + (k^۳ - ۳k - ۱)$$

چون $k \geq ۳$، لذا $k^۳ \geq ۳k^۲ > ۳k$، پس $k^۳ \geq ۳k^۲$ و $k^۳ \geq ۳k+۱$، پس $۳k^۲ \geq (k+۱)^۳$. درنتیجه $۳^{k+۱} \geq (k+۱)^۳$. لذا اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+۱$ نیز درست است.

۸) فرض کنید $۲^{m+k-۲} \geq mk$، در این صورت $۲^{m+(k+۱)-۲} \geq ۲mk$. از طرفی

$$۲mk - m(k+۱) = mk - m = m(k-۱) \geq ۰$$

پس $۲mk \geq m(k+۱)$ و لذا $۲^{m+(k+۱)-۲} \geq m(k+۱)$. پس اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+۱$ نیز درست است.

۹) فرض کنید

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲k-۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times ۲k} \leq \frac{۱}{\sqrt{۲k+۱}}$$

با ضرب طرفین این نابرابری در $\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲k+۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times (۲k+۲)} < \frac{\sqrt{۲k+۱}}{۲k+۲}$$

از طرفی

$$(۲k+۱)(۲k+۳) = ۴k^۲ + ۸k + ۳ < (۲k+۲)^۲$$

و لذا $\frac{۲k+۱}{(۲k+۲)^۲} < \frac{۱}{۲k+۳}$، پس $\frac{\sqrt{۲k+۱}}{۲k+۲} < \frac{۱}{\sqrt{۲k+۳}}$. درنتیجه

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲k+۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times (۲k+۲)} < \frac{۱}{\sqrt{۲k+۳}}$$

لذا اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+۱$ نیز درست است.

۱۰) فرض کنید $(1+x)^k > 1+kx$، در این صورت چون $1+x>0$، پس

$$(1+x)^{k+1} > (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$$

پس اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+1$ نیز درست است.

۱۱) فرض کنید $11^k \leq 2^{k-1}(5^k+6^k)$، در این صورت

$$11^{k+1} \leq 2^{k-1}(5^k+6^k)(5+6) = 2^{k-1}(5^{k+1}+6^{k+1}+6\times 5^k+5\times 6^k)$$

از طرفی

$$5^{k+1}+6^{k+1}-6\times 5^k-5\times 6^k = (6^k-5^k)(6-5) > 0$$

پس $6\times 5^k+5\times 6^k \leq 5^{k+1}+6^{k+1}$ و لذا

$$11^{k+1} \leq 2^{k-1}\times 2\times(5^{k+1}+6^{k+1}) = 2^k(5^{k+1}+6^{k+1})$$

لذا اگر حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+1$ نیز درست است.

۱۲) فرض کنید حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد و از یک صفحهٔ شطرنجی $(6k+7)\times(6k+7)$ یک خانه حذف شده باشد. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که خانهٔ حذف شده در مربع $(6k+1)\times(6k+1)$ گوشهٔ سمت راست و بالای صفحهٔ شطرنجی قرار دارد. چون حکم به‌ازای $n=k$ درست است، لذا بقیهٔ خانه‌های مربع $(6k+1)\times(6k+1)$ را می‌توان با موزاییک‌های داده شده فرش کرد. خانه‌های باقی‌مانده از صفحهٔ شطرنجی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. یک دسته تشکیل یک مستطیل $6\times(6k+1)$ و دستهٔ دیگر تشکیل یک مستطیل $6\times(6k+7)$ می‌دهند. به سادگی می‌توانید هردوی این مستطیل‌ها را با موزاییک‌های 2×3 بپوشانید. پس حکم به‌ازای $n=k+1$ نیز درست است.

۱۳) فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. چنان‌چه خط $k + ۱$ ام را رسم کنیم هنگام برخورد این خط با هر یک از خطوط دیگر یکی از نواحی قبلی به دو ناحیه تقسیم می‌شود و در ضمن پس از برخورد خط $k + ۱$ ام با آخرین خط نیز یکی از نواحی قبلی به دو ناحیه تقسیم می‌شود. پس بعد از رسم خط $k + ۱$ ام، $k + ۱$ ناحیه به تعداد نواحی قبلی اضافه می‌شود. لذا تعداد نواحی برابر $\frac{k^۲+k+۲}{۲} + k + ۱$ می‌شود. از طرفی

$$\frac{(k+۱)^۲ + (k+۱) + ۲}{۲} = \frac{k^۲ + k + ۲}{۲} + k + ۱$$

پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است.

۱۴) فرض کنید $k \geq ۲۴$ و اعداد صحیح و نامنفی x و y وجود داشته باشند که $۵x + ۷y = k$. اگر $y \geq ۲$ تساوی

$$۵(x + ۳) + ۷(y - ۲) = k + ۱$$

را در نظر می‌گیریم و اگر $y \leq ۱$، آنگاه $x \geq ۴$ و تساوی

$$۵(x - ۴) + ۷(y + ۳) = k + ۱$$

را در نظر می‌گیریم. پس در هر صورت اعداد صحیح و نامنفی r و s وجود دارند که $۵r + ۷s = k + ۱$. لذا اگر حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است.

۱۵) فرض کنید حکم به‌ازای k درست باشد و k خانه از یک جدول $(k + ۱) \times (k + ۱)$ را علامت گذاشته باشیم. در این صورت حداقل یک ستون وجود دارد که در آن هیچ علامتی قرار ندارد. این ستون را با ستون آخر جدول جابه‌جا می‌کنیم. همچنین سطری از جدول را که حداقل یک علامت در آن قرار دارد با سطر آخر جدول جابه‌جا می‌کنیم. حال سطر و ستون آخر جدول را حذف می‌کنیم و به جدولی $k \times k$ می‌رسیم

که حداکثر $k - ۱$ خانه از آن علامت دارند. چون حکم به‌ازای k درست است، پس می‌توانیم با جابه‌جایی سطرها و جابه‌جایی ستون‌های این جدول به جدولی برسیم که همهٔ خانه‌های علامتدار آن زیر قطر اصلی جدول قرار داشته باشند. پس حکم به‌ازای $k + ۱$ نیز درست است.

۱۶) فرض کنید $a_k = ۲ \times ۳^{k-۱} - ۱$، در این صورت

$$a_{k+۱} = ۳a_k + ۲ = ۳(۲ \times ۳^{k-۱} - ۱) + ۲ = ۲ \times ۳^k - ۱$$

پس اگر حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است.

۱۷) فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و اعداد $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k در شرایط گفته شده صدق کنند. قرار دهید

$$a_{k+۱} = a_۱ a_۲ \ldots a_k + ۱$$

و نشان دهید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{k+۱}$ نیز در شرایط مورد نظر صدق می‌کنند.

۱۸) ابتدا نشان دهید خانه‌های واقع در گوشه‌های مجاور نمی‌توانند همرنگ باشند. سپس فرض کنید خانه‌های $(۱,۱)$ و $(۲n, ۲n)$ به رنگ آبی باشند (یعنی خانه‌های واقع در دو گوشهٔ مقابل). نشان دهید خانه‌های $(۲, ۲n - ۱)$ و $(۲n - ۱, ۲)$ نیز باید به رنگ آبی باشند. سپس از این که حکم برای $n - ۱$ درست است به تناقض برسید.

۱۹) فرض کنید A جدولی $۲^k \times ۲^k$ با شرایط گفته شده باشد و A' جدولی باشد که از جابه‌جا کردن اعداد ۰ و ۱ از جدول A به‌دست آمده است. در این صورت

A	A
A'	A

جدولی $۲^{k+۱} \times ۲^{k+۱}$ است که شرایط مورد نظر را دارد.

۲۰) فرض کنید A جدولی $(۲^k - ۱) \times ۲^k$ با شرایط گفته شده باشد و A' جدولی باشد که از جابه‌جا کردن اعداد ۰ و ۱ از جدول A به‌دست آمده است. نشان دهید در هر ستون از A تعداد اعداد ۰ و ۱ برابرند. حال

A	A	۰ ⋮ ۰
A'	A	۱ ⋮ ۱

جدولی $(۲^{k+۱} - ۱) \times ۲^{k+۱}$ است که شرایط مورد نظر را دارد.

۲۱) برای عدد طبیعی m، بزرگترین مقسوم‌علیه فرد m را با a_m نشان می‌دهیم. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. در این صورت

$$a_{k+۱} + a_{k+۲} + \cdots + a_{۲k} = k^۲$$

از تعریف مشخص است که $a_{۲k+۱} = ۲k + ۱$ و $a_{۲k+۲} = a_{k+۱}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} a_{k+۲} + a_{k+۳} + \cdots + a_{۲k+۲} &= a_{k+۲} + \cdots + a_{۲k} + ۲k + ۱ + a_{k+۱} \\ &= k^۲ + ۲k + ۱ = (k + ۱)^۲ \end{aligned}$$

پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است.

۲۲) فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و $۲^{k+۱}$ مهره در خانه‌های یک جدول $(k + ۱) \times ۲$ قرار داشته باشند.

۲									۱	۰
۳										

ابتدا فرض کنید در خانه‌های ستون اول (ستون سمت راست) هیچ مهره‌ای قرار نداشته باشد. مهره‌ها را به دلخواه به دو دستهٔ ۲^k تایی تقسیم می‌کنیم. چون حکم به‌ازای k درست است، لذا از هر دسته حداقل یک مهره را می‌توان به خانهٔ شماره ۱ رساند. پس می‌توان کاری کرد که حداقل دو مهره در خانهٔ شمارهٔ ۱ قرار گیرند و بعد از آن می‌توان یک مهره را در خانهٔ شماره صفر قرار دارد. حال فرض کنید در ستون اول حداقل یک مهره قرار داشته باشد و تعداد مهره‌های خانه‌های ۲ و ۳ به ترتیب برابر a و b باشد، پس $a + b < ۲^{k+۱}$. $\lfloor \frac{a}{۲} \rfloor$ از مهره‌های خانهٔ ۲ و $\lfloor \frac{b}{۲} \rfloor$ از مهره‌های خانهٔ ۳ را می‌توانیم به ستون سمت راست منتقل کنیم (هر بار دوتا از مهره‌های یکی از این ۲ خانه را گرفته و یکی را در خانهٔ سمت راست آن قرار می‌دهیم). بعد از انجام این کار در k ستون سمت راست $\lfloor \frac{a}{۲} \rfloor + \lfloor \frac{b}{۲} \rfloor + (۲^{k+۱} - a - b)$ مهره قرار دارند. با توجه به این که

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{a}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{۲} \right\rfloor + (۲^{k+۱} - a - b) &\geq \frac{a-۱}{۲} + \frac{b-۱}{۲} + ۲^{k+۱} - a - b \\
&= ۲^{k+۱} - ۱ - \tfrac{a+b}{۲} > ۲^{k+۱} - ۱ - ۲^k \\
&= ۲^k - ۱
\end{aligned}$$

پس در k ستون سمت راست حداقل ۲^k مهره قرار دارند و با توجه به درستی حکم به‌ازای $n = k$ نتیجه می‌گیریم حداقل یک مهره را می‌توان به خانهٔ شمارهٔ صفر رساند. پس در هر صورت حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است.

۲۳) فرض کنید B جدولی $n \times n$ با ویژگی‌های گفته شده باشد. C را جدولی $n \times n$ بگیرید که از اضافه کردن عدد $۲n - ۱$ به هر خانه از B به‌دست آمده باشد و D را جدولی $n \times n$ بگیرید که از قرار دادن عدد $۴n - ۱$ در خانه‌های قطر اصلی C به‌دست آمده باشد. حال

B	C
D	B

جدولی $2n \times 2n$ با ویژگی‌های مورد نظر است.

۲۴) فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و 2^{k+1} نقطه داده شده باشد. این نقاط را به دو دستهٔ 2^k تایی تقسیم می‌کنیم. پاره‌خط‌های بین نقاط هر دسته را با رنگ‌های c_1، c_2، ... و c_k رنگ می‌کنیم طوری که برای هر رنگ‌آمیزی نقاط این دسته با همین k رنگ پاره‌خطی وجود داشته باشد که با دو نقطهٔ انتهایی خود همرنگ باشد. حال تمام پاره‌خط‌های بین دو دسته را با c_{k+1} رنگ می‌کنیم. فرض کنید یک رنگ‌آمیزی از 2^{k+1} نقطه با رنگ‌های c_1، c_2، ... و c_{k+1} داده شده باشد. اگر در یکی از دو دسته، هیچ نقطه‌ای به رنگ c_{k+1} نباشد، در این صورت دیدیم که در این دسته پاره‌خطی وجود دارد که با دو نقطهٔ انتهایی خود همرنگ است و اگر در هر دسته نقطه‌ای به رنگ c_{k+1} وجود داشته باشد، در این صورت پاره‌خط بین این دو نقطه با نقاط انتهایی خود همرنگ است. پس حکم به‌ازای $n = k + 1$ درست است.

۲۵) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد، $A = \{1, \ldots, n\}$، $B = \{1, \ldots, n + 1\}$ و $0 \leq k \leq 2^{n+1}$. اگر $0 \leq k \leq 2^n$، در این صورت طبق فرض استقرا می‌توان k زیرمجموعه از A را به رنگ سفید و بقیهٔ زیرمجموعه‌های A را به رنگ سیاه درآورد به‌طوری‌که اجتماع هر دو زیرمجموعهٔ همرنگ از A با آن‌ها همرنگ باشد. حال زیرمجموعه‌هایی از B را که عضو $n + 1$ را دارند به رنگ سیاه در می‌آوریم. در این صورت اجتماع هر دو زیرمجموعهٔ همرنگ از B با آن‌ها همرنگ است. اگر $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$، آنگاه $0 \leq 2^{n+1} - k \leq 2^n$. طبق فرض استقرا می‌توان $2^{n+1} - k$

زیرمجموعه از A را به رنگ سیاه و بقیهٔ زیرمجموعه‌های A را به رنگ سفید درآورد به‌طوری‌که اجتماع هر دو زیرمجموعهٔ همرنگ از A با آن‌ها همرنگ باشد. حال زیرمجموعه‌هایی از B را که عضو $n+۱$ را دارند به رنگ سفید در می‌آوریم. در این صورت اجتماع هر دو زیرمجموعهٔ همرنگ از B با آن‌ها همرنگ است. لذا در هر صورت حکم به‌ازای $n+۱$ نیز درست است.

۲۶) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. در این صورت در هر یک از دنباله‌های

$$۲, ۱, ۴, ۳, ۶, ۵, \ldots, ۲n, ۲n-۱, \qquad ۴, ۳, ۶, ۵, ۸, ۷, \ldots, ۲n+۲, ۲n+۱$$

میانگین هر چند جملهٔ متوالی (حداقل ۲ جمله) عددی غیر صحیح است (دنبالهٔ دوم از اضافه کردن ۲ واحد به هر یک از جملات دنبالهٔ اول به‌دست آمده است). حال به سادگی می‌توانید ثابت کنید که در دنبالهٔ

$$۲, ۱, ۴, ۳, ۶, ۵, \ldots, ۲n, ۲n-۱, ۲n+۲, ۲n+۱$$

میانگین کل جملات، میانگین جملات اول تا $۲n+۱$ ام، میانگین جملات دوم تا آخر و میانگین جملات دوم تا $۲n+۱$ ام همگی غیر صحیح‌اند، لذا در این دنباله میانگین هر چند جملهٔ متوالی (حداقل ۲ جمله) عددی غیر صحیح است. پس حکم به‌ازای $n+۱$ نیز درست است.

۲۷) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. پس جاده‌های بین شهرهای $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{۲n+۱}$ را می‌توانیم طوری یک طرفه کنیم که از هر شهر n جاده خارج و به هر شهر n جاده وارد شود. دو شهر B و C به $۲n+۱$ شهر فوق اضافه می‌کنیم. جاده‌های بین B و شهرهای $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{n+۱}$ از سمت B به طرف این شهرها و جاده‌های بین C و این $n+۱$ شهر را از سمت این $n+۱$ شهر به طرف C یک طرفه می‌کنیم. همچنین جاده‌های بین B و شهرهای $A_{n+۲}$، ... و $A_{۲n+۱}$ را از سمت این شهرها به طرف B و

جاده‌های بین C و این n شهر را از سمت C به طرف این شهرها یک طرفه می‌کنیم و در نهایت جهت جاده بین B و C را از C به سمت B در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان دید که از هر یک از $2n+3$ شهر $n+1$ جاده خارج و به هر کدام $n+1$ جاده وارد شده است. پس حکم به‌ازای $n+1$ نیز درست است.

۲۸) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و افراد A_1، ...، A_n، B_1، ... و B_n طوری با یکدیگر دست داده باشند که هر یک از A_i و B_i دقیقاً با i نفر دست داده باشند، $1 \leq i \leq n$. حال دو نفر به نام‌های A_{n+1} و B_{n+1} به این جمع اضافه می‌کنیم. چنان چه A_{n+1} با هر یک از B_1، B_2، ... و B_{n+1} دست دهد، در این صورت A_1 و B_{n+1} با یک نفر، A_2 و B_1 با دو نفر، A_3 و B_2 با سه نفر، ... و A_{n+1} و B_n با $n+1$ نفر دست داده‌اند. پس حکم به‌ازای $n+1$ نیز درست است.

۲۹) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و $(n+1)^2+1$ پاره‌خط از پاره‌خط‌های بین $2n+2$ نقطهٔ داده شده رسم شده باشد. دوتا از این نقاط مانند A و B را طوری انتخاب می‌کنیم که پاره‌خط بین آن‌ها رسم شده باشد. اگر نقطه‌ای مانند C وجود داشته باشد که هر دو پاره‌خط AC و BC رسم شده باشند که حکم به‌ازای $n+1$ نتیجه می‌شود. پس فرض کنید برای هر نقطهٔ C حداقل یکی از پاره‌خط‌های AC و BC رسم نشده باشند. نتیجه می‌گیریم علاوه بر پاره‌خط AB حداکثر $2n$ پاره‌خط وجود دارد که یک انتهای آن‌ها A یا B باشد. پس حداقل

$$(n+1)^2+1-(2n+1)=n^2+1$$

پاره‌خط از پاره‌خط‌های بین $2n$ نقطهٔ دیگر رسم شده است. لذا طبق فرض استقرا در بین این $2n$ نقطه ۳ نقطه وجود دارند که هر سه پاره‌خط بین آن‌ها رسم شده است. پس حکم به‌ازای $n+1$ درست است.

۳۰) فرض کنید زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲n\}$ را بتوانیم به دسته‌های ۳ تایی

$$\{A_۱,B_۱,C_۱\},\ldots,\{A_m,B_m,C_m\} \qquad (m=\frac{۲^{۲n}-۱}{۳})$$

افراز کنیم به‌طوری‌که برای هر i، $A_i=B_i\Delta C_i$. به‌ازای هر i، دسته‌های ۳ تایی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\{A_i,B_i,C_i\},\quad &\{A_i\cup\{۲n+۱\},B_i\cup\{۲n+۲\},C_i\cup\{۲n+۱,۲n+۲\}\},\\ &\{A_i\cup\{۲n+۲\},B_i\cup\{۲n+۱,۲n+۲\},C_i\cup\{۲n+۱\}\},\\ &\{A_i\cup\{۲n+۱,۲n+۲\},B_i\cup\{۲n+۱\},C_i\cup\{۲n+۲\}\}\end{aligned}$$

همچنین دستهٔ

$$\{\{۲n+۱\},\{۲n+۲\},\{۲n+۱,۲n+۲\}\}$$

را نیز در نظر بگیرید. تعداد این دسته برابر

$$۴m+۱=\frac{۲^{۲n+۲}-۱}{۳}$$

است و هر زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲n+۲\}$ دقیقاً در یکی از این دسته‌ها آمده است. در ضمن در هر دسته مجموعهٔ دست چپ برابر تفاضل متقارن دو مجموعهٔ دیگر است.

۳۱) ابتدا حکم را به‌ازای $m=۱$ ثابت کنید. سپس فرض کنید حکم به‌ازای $m-۱$ درست باشد. برای اثبات حکم به‌ازای m ابتدا ثابت کنید اعداد هر دو خانه‌ای که نسبت به سطر وسط جدول قرینه‌اند با هم برابرند. برای اثبات این مطلب جدول $(۲^{m-۱}-۱)\times(۲^n-۱)$ بالای جدول را در نظر بگیرید که در هر خانه از آن حاصل‌ضرب عدد این خانه و عدد قرینهٔ این خانه نسبت به سطر وسط جدول نوشته شده است. از فرض استقرا استفاده کنید و نتیجه بگیرید تمام اعداد واقع در این جدول

برابر ۱ هستند. سپس از درستی حکم به‌ازای $m = ۱$ استفاده کنید و نتیجه بگیرید تمام اعداد واقع در سطر وسط جدول برابر ۱ هستند. نهایتاً از فرض استقرا استفاده کنید و ثابت کنید که تمام اعداد واقع در بالا و پایین سطر وسط جدول نیز برابر ۱ هستند.

۳۲) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. اگر تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در دسته‌های ۱، ۲، ... و n قرار داشته باشند، در این صورت از فرض استقرا حکم نتیجه می‌شود، پس فرض کنید یکی از این زیرمجموعه‌ها، مثلاً A در دستهٔ $n + ۱$ قرار داشته باشد. اگر تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n + ۱\}$ که شامل $n + ۱$ هستند در دسته‌های ۱، ۲، ... و n قرار داشته باشند، در این صورت از فرض استقرا حکم نتیجه می‌شود. پس فرض کنید یکی از این زیرمجموعه‌ها، مثلاً B در دستهٔ $n + ۱$ قرار داشته باشد. حال بزرگترین عضو $A\Delta B$ برابر $n + ۱$ است و هر دوی A و B نیز در دستهٔ $n + ۱$ قرار دارند. پس در هر صورت حکم به‌ازای $n + ۱$ درست است.

۳۳) به استقرا روی n، تعداد شهرهای کشور، حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و $n + ۱$ شهر در نظر بگیرید که بین هر دوتا جادهٔ شوسه یا راه‌آهن وجود داشته باشد. یکی از این شهرها مانند A را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا جهان‌گرد می‌تواند با شروع از یکی از n شهر غیر از A مثلاً $A_۱$ از هر یک از این شهرها دقیقاً یک بار عبور کند و به شهر $A_۱$ باز گردد به‌طوری‌که در طی مسیر حداکثر یک بار وسیلهٔ خود را عوض کند. مثلاً فرض کنید

$$A_۱ - A_۲ - A_۳ - \cdots - A_n - A_۱$$

مسیر طی شده توسط جهان‌گرد باشد به‌طوری‌که از ابتدای مسیر تا A_i جاده‌ها شوسه و از A_i تا انتهای مسیر جاده‌ها راه‌آهن باشند (اگر تعویض وسیله رخ نداده باشد i برابر ۱

یا n است). اگر جادهٔ بین A و A_i شوسه باشد، جهان‌گرد مسیر

$$A_۱ - \cdots - A_i - A - A_{i+۱} - \cdots - A_n - A_۱$$

و در غیر این صورت مسیر

$$A_۱ - \cdots - A_{i-۱} - A - A_i - \cdots - A_n - A_۱$$

را طی می‌کند. در هر دو حالت در طی مسیر حداکثر یک بار تعویض وسیله رخ می‌دهد. پس حکم به‌ازای $n + ۱$ نیز درست است.

۳۴) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و A دنباله‌ای به طول $۲^n - ۱$ باشد که هر جملهٔ آن برابر یکی از اعداد $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n باشد و حاصل‌ضرب هر چند جملهٔ متوالی از A مربع کامل نباشد. دنباله‌ای به طول $۲^{n+۱} - ۱$ در نظر بگیرید که $۲^n - ۱$ جملهٔ اول آن همانند A باشد، جملهٔ ۲^n ام برابر $p_{n+۱}$ باشد و $۲^n - ۱$ جملهٔ پایانی آن نیز همانند A باشد. به سادگی می‌توان دید که حاصل‌ضرب هر چند جملهٔ متوالی از این دنباله مربع کامل نیست. پس حکم به‌ازای $n + ۱$ نیز درست است.

۳۵) به استقرا روی k حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای k درست باشد و $۲k$ تا از مهره‌ها را قرمز کرده باشیم به طوری که هر مهرهٔ قرمز با حداقل یک مهرهٔ قرمز دیگر در یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشد. اگر دربین مهره‌های غیر قرمز دو مهره وجود داشته باشند که در یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشند این دو مهره را قرمز می‌کنیم و الا دو مهرهٔ دلخواه مانند A و B را انتخاب و آن‌ها را قرمز می‌کنیم. توجه کنید در حالت اخیر هر یک از مهره‌های A و B با حداقل یکی از $۲k$ مهرهٔ قرمز در یک سطر یا یک ستون قرار دارند. نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای $k + ۱$ نیز درست است.

۳۶) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و جدولی $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ در اختیار داشته باشیم. این جدولی را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت جدولی $۲^n \times ۲^n$ باشد. طبق

فرض استقرا می‌توانیم عمل داده شده را طوری انجام دهیم که در هر یک از این ۴ جدول همهٔ اعداد برابر باشند. مثلاً فرض کنید اعداد واقع در این ۴ جدول به ترتیب a، b، c و d باشند. هر بار یک خانه شامل عدد a و یک خانه شامل عدد b را گرفته و در هر دو خانه $\frac{a+b}{۲}$ را می‌نویسیم. این کار را تکرار می‌کنیم تا در همهٔ خانه‌های دو جدول شامل اعداد a و b عدد $\frac{a+b}{۲}$ نوشته شود. همین کار را در مورد دو جدول دیگر نیز انجام می‌دهیم تا در همهٔ خانه‌های آن‌ها عدد $\frac{c+d}{۲}$ نوشته شود. سپس در هر مرحله یک خانه شامل عدد $\frac{a+b}{۲}$ و یک خانه شامل عدد $\frac{c+d}{۲}$ را گرفته و در هر دو $\frac{a+b+c+d}{۴}$ قرار می‌دهیم. این کار را تکرار می‌کنیم تا در همهٔ خانه‌های جدول این عدد قرار گیرد. پس حکم برای $n+۱$ نیز درست است.

۳۷) فرض کنید حکم برای n درست باشد و اعداد $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۲^n+۱}$ با ویژگی‌های گفته شده داده شده باشند و $۱ \leq k < ۲^n$. در این صورت ۴ رابطهٔ زیر را داریم:

$$a_k + \cdots + a_{۲k-۱} = ۰, \quad a_{k+۱} + \cdots + a_{۲k+۱} = ۰,$$

$$a_{۲^n+k} + \cdots + a_{۲^n+۱} + a_۱ + \cdots + a_{۲k-۱} = ۰,$$

$$a_{۲^n+k+۱} + \cdots + a_{۲^n+۱} + a_۱ + \cdots + a_{۲k+۱} = ۰$$

چنان‌چه مجموع تساوی‌های اول و چهارم را از مجموع تساوی‌های دوم و سوم کم کنیم نتیجه می‌گیریم $a_{۲^n+k} = a_k$. حال فرض کنید $۲^{n-۱} < k \leq ۲^n$. در این صورت طبق فرض استقرا

$$a_k + \cdots + a_{۲^n} + a_{۲^n+۱} + \cdots + a_{۲k-۱} = ۰$$

در نتیجه

$$a_k + \cdots + a_{۲^n} + a_۱ + \cdots + a_{۲k-۲^n-۱} = ۰$$

پس $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۲^n}$ در شرایط فرض استقرا صدق می‌کنند و لذا همگی برابر صفر هستند. چون $a_{۲^n+k} = a_k$ نتیجه می‌گیریم بقیهٔ a_i ها نیز برابر صفرند. پس حکم برای $n+۱$ نیز درست است.

۳۸) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و $n+1$ کتاب A_1، A_2، ... و A_{n+1} داده شده باشد. ابتدا این کتاب‌ها را با ترتیبی دلخواه در قفسه قرار می‌دهیم به‌طوری‌که A_1 در انتها قرار گیرد. طبق فرض استقرا می‌توانیم عمل را طوری تکرار کنیم که تمام $n!$ ترتیب مختلف کتاب‌های غیر از A_1 دقیقاً یک بار ظاهر شوند. سپس جای A_1 و A_2 را عوض می‌کنیم. مجدداً طبق فرض استقرا می‌توانیم عمل را طوری تکرار کنیم که تمام $n!$ ترتیب مختلف کتاب‌های غیر از A_2 دقیقاً یک بار ظاهر شوند، سپس جای کتاب‌های A_2 و A_3 را عوض می‌کنیم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا نهایتاً کتاب A_{n+1} در انتها قرار گیرد و همهٔ ترتیب‌های مختلف n کتاب دیگر را به‌دست آوریم. در پایان هر یک از $(n+1)!$ ترتیب مختلف کتاب‌های A_1، ... و A_{n+1} دقیقاً یک بار ظاهر شده‌اند. پس حکم به‌ازای $n+1$ نیز درست است.

۳۹) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و $n+1$ لامپ خاموش در یک ردیف داده شده باشند. بدون این که وضعیت لامپ $n+1$ ام را تغییر دهیم طبق فرض استقرا می‌توانیم عمل داده شده را طوری تکرار کنیم که هر یک از 2^n وضعیت مختلف n لامپ اول دقیقاً یک بار ظاهر شوند و در ضمن در وضعیت پایانی فقط یکی از این n لامپ روشن باشند (که بتوان با یک بار انجام عمل به وضعیتی رسید که همهٔ لامپ‌ها خاموش باشند). حال لامپ $n+1$ ام را روشن می‌کنیم. حال اعمالی را که در مرحلهٔ قبل روی n لامپ اول انجام داده بودیم اکنون به صورت معکوس (از آخر به اول) روی این n لامپ انجام می‌دهیم. توجه کنید که اگر با انجام یک سری عمل به ترتیب وضعیت‌های Q_1، Q_2، ... و Q_k به‌دست آیند، در این صورت با شروع از Q_k و انجام همان اعمال منتها به صورت معکوس به ترتیب وضعیت‌های Q_k، Q_{k-1}، ... و Q_1 به‌دست می‌آیند. پس هر یک از 2^n وضعیت مختلف n لامپ اول دقیقاً یک بار ظاهر می‌شوند و در وضعیت پایانی تمام این n لامپ خاموش می‌باشند. در نهایت لامپ $n+1$ ام را خاموش می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای $n+1$ نیز درست است.

۴۰) حکم را به استقرا روی $m + n$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای k درست باشد و اعداد $a_۱$، ...، a_m، $b_۱$، ... و b_n داده شده باشند به‌طوری‌که $m + n = k + ۱$ و

$$a_۱ + \cdots + a_m = b_۱ + \cdots + b_n$$

اگر هر a_i با هر b_i برابر باشد، در این صورت $m = n$. جدولی $n \times n$ در نظر می‌گیریم و در همهٔ خانه‌های قطر اصلی آن $a_۱$ و در بقیهٔ خانه‌های جدول عدد صفر را می‌نویسیم. این جدول ویژگی‌های مورد نظر را دارد. حال فرض کنید در بین a_i ها و b_i دو عدد مختلف وجود داشته باشد، مثلاً $a_۱ > b_۱$. در این صورت

$$(a_۱ - b_۱) + a_۲ + \cdots + a_m = b_۲ + \cdots + b_n$$

طبق فرض استقرا جدولی $m \times (n - ۱)$ وجود دارد که در خانه‌های آن عددهای نامنفی قرار دارند به‌طوری‌که حداقل در $(m - ۱)(n - ۲)$ خانه از آن عدد صفر وجود دارد و در ضمن مجموع اعداد سطر اول آن برابر $a_۱ - b_۱$، مجموع اعداد سطر i ام برابر a_i، $۲ \leq i \leq m$، و مجموع اعداد ستون j ام برابر $b_{j+۱}$، $۱ \leq j \leq n - ۱$، است. یک ستون به سمت چپ این جدول اضافه می‌کنیم. در خانهٔ اول این ستون عدد $b_۱$ و در بقیهٔ خانه‌های آن عدد صفر را قرار می‌دهیم. جدولی $m \times n$ با اعداد نامنفی به‌دست می‌آید که حداقل در

$$(m - ۱)(n - ۲) + (m - ۱) = (m - ۱)(n - ۱)$$

خانه از آن عدد صفر قرار دارد و در ضمن مجموع اعداد سطر i ام آن برابر a_i، $۱ \leq i \leq m$، و مجموع اعداد ستون j ام آن برابر b_j، $۱ \leq j \leq n$، است. پس حکم به‌ازای $k + ۱$ نیز درست است.

بخش ۸–۲

۱) به استقرای قوی روی $a+b$ حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۲، ۳، ...و k درست باشد و a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند که $a+b=k+۱$. اگر a و b برابر باشند چون نسبت به هم اول‌اند باید $a=b=۱$ که در این حالت حکم درست است. پس فرض کنید $a>b$. چون a و b نسبت به هم اول‌اند، پس $a-b$ و b نیز نسبت به هم اول‌اند. چون $(a-b)+b \leq k$، پس طبق فرض استقرا اعداد صحیح x و y وجود دارند که $(a-b)x+by=۱$. در نتیجه $ax+b(y-x)=۱$ و لذا حکم به‌ازای $k+۱$ نیز درست است.

۲) فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و $n-۱$ درست باشد و $n=۳q+r$ که $۰ \leq r \leq ۲$. چون $۱ \leq q \leq n-۱$، پس طبق فرض استقرا q نمایشی به صورت

$$a_۰+۳a_۱+۳^۲a_۲+\cdots+۳^ka_k$$

دارد که برای هر i، $۰ \leq a_i \leq ۲$. در نتیجه

$$n=r+۳q=r+۳a_۰+۳^۲a_۱+۳^۳a_۲+\cdots+۳^{k+۱}a_k$$

و لذا حکم به‌ازای n نیز درست است.

۳) فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و $n-۱$ درست باشد و عدد k به‌گونه‌ای باشد که $k! \leq n < (k+۱)!$. عدد r را طوری می‌گیریم که $rk! \leq n < (r+۱)k!$، در این صورت $۱ \leq r \leq k$. چون $n-rk! \leq n-۱$، پس طبق فرض استقرا $n-rk!$ نمایشی به صورت

$$a_۱\times ۱!+a_۲\times ۲!+\cdots+a_t\times t!$$

دارد که برای هر i، $۰ \leq a_i \leq i$ و در ضمن $a_t \neq ۰$. چون $n<(r+۱)k!$، پس $n-rk!<k!$ و لذا $t \leq k-۱$. پس اگر قرار دهیم $a_k=r$ و $a_{t+۱}=\cdots=a_{k-۱}=۰$،

آنگاه

$$n = a_1 \times 1! + a_2 \times 2! + \cdots + a_k \times k!$$

لذا حکم به‌ازای n نیز درست است.

۴) حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای $k-1$ درست باشد و m عددی طبیعی کوچکتر از $\binom{n}{k}$ باشد. عدد r را طوری می‌گیریم که $\binom{r}{k} \leq m < \binom{r+1}{k}$. در این صورت $k \leq r < n$ و

$$m - \binom{r}{k} < \binom{r+1}{k} - \binom{r}{k} = \binom{r}{k-1}$$

طبق فرض استقرا $m - \binom{r}{k}$ نمایشی به صورت

$$\binom{a_1}{1} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_{k-1}}{k-1}$$

دارد که $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < r$. در نتیجه

$$m = \binom{a_1}{1} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \binom{r}{k}$$

و لذا حکم به‌ازای k نیز درست است.

۵) حکم را به استقرای قوی روی m ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و $m-1$ درست باشد و عدد r به گونه‌ای باشد که $F_r \leq m < F_{r+1}$، در این صورت

$$m - F_r < F_{r+1} - F_r = F_{r-1}$$

چون $m - F_r \leq m - 1$، لذا طبق فرض استقرا $m - F_r$ نمایشی به صورت

$$F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k}$$

دارد که i_1، ... و i_k اندیس‌های متمایزی هستند که اختلاف هر دوتا از آن‌ها حداقل ۲ است. چون $m - F_r < F_{r-1}$ نتیجه می‌گیریم i_j ها همگی از $r - 1$ کوچکترند. حال از

$$m = F_{i_1} + \cdots + F_{i_k} + F_r$$

نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای m نیز درست است.

۶) با توجه به این که یک مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکتر تقسیم کرد (کافی است وسط اضلاع مثلث را به یکدیگر وصل کنیم) لذا اگر حکم به‌ازای n درست باشد، به‌ازای $n + 3$ نیز درست است. لذا برای اثبات حکم کافی است حکم را به‌ازای ٦، ۷ و ۸ ثابت کنید که این کار را به سادگی می‌توانید انجام دهید.

۷) اگر حکم به‌ازای n درست باشد، آنگاه به‌ازای $n + 3$ نیز درست است زیرا کافی است یکی از n کارت را به ماشین اول بدهیم و ۴ کارت دریافت کنیم. لذا برای اثبات حکم کافی است حکم را به‌ازای ۹، ۱۰ و ۱۱ ثابت کنید که این کار را به سادگی می‌توانید انجام دهید.

۸) حکم را به استقرای قوی روی $a + b$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ...و $k - 1$ درست باشد و a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند که $a + b = k$. ابتدا فرض کنید یکی از a و b زوج و دیگری فرد باشد، مثلاً فرض کنید $a = 2q$ (حالتی که b زوج باشد به طور مشابه بررسی می‌شود). چون a و b نسبت به هم اولند، پس q و b نیز نسبت به هم اولند و چون $q + b \leq k - 1$، پس طبق فرض استقرا می‌توانیم مهره را به نقطهٔ (q, b) برسانیم و بعد از آن با انجام یک حرکت مهره را روی نقطهٔ (a, b) قرار می‌دهیم. حال فرض کنید a و b هر دو فرد باشند و $a > b$ (حالت $b > a$ به طور مشابه بررسی می‌شود). چون a و b نسبت به هم اولند، پس $a + b$ و b نیز نسبت به هم اولند و لذا $\frac{a+b}{2}$ و b نیز نسبت به هم اولند. چون $\frac{a+b}{2} + b \leq k - 1$، لذا طبق فرض استقرا می‌توانیم مهره را به نقطهٔ $(\frac{a+b}{2}, b)$ برسانیم و بعد از آن با انجام یک

حرکت مهره را روی نقطهٔ $(a+b,b)$ و سپس مهره را روی نقطهٔ (a,b) قرار دهیم. پس حکم به‌ازای k نیز درست است.

۹) به استقرا روی تعداد حروف a در کلمهٔ S حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و $k-۱$ درست و S کلمه‌ای با k حرف a و k حرف b باشد. اگر حروف اول و آخر S متمایز باشند، در این صورت $S=aTb$ یا $S=bTa$ که T کلمه‌ای با $k-۱$ حرف a و $k-۱$ حرف b است. طبق فرض استقرا می‌توانیم کارتی با کلمهٔ T تولید کنیم و لذا پس از آن نیز می‌توانیم کارتی با کلمهٔ S به‌دست آوریم. حال فرض کنید حروف اول و آخر S یکسان باشند، مثلاً فرض کنید این دو حرف a باشند. به‌ازای $۱ \leq i \leq ۲k$، فرض کنید از حرف اول تا حرف i ام S، x_i حرف a و y_i حرف b وجود داشته باشد، در این صورت $x_۱=۱$، $y_۱=۰$، $x_{۲k-۱}=k-۱$ و $y_{۲k-۱}=k$. پس $x_۱-y_۱>۰$ و $x_{۲k-۱}-y_{۲k-۱}<۰$. فرض کنید t کوچکترین عددی باشد که $x_t-y_t<۰$. در نتیجه $x_{t-۱}-y_{t-۱}\geq ۰$. اگر حرف t ام S برابر a باشد، آنگاه

$$x_t-y_t=(x_{t-۱}+۱)-y_{t-۱}>۰$$

که تناقض است. لذا حرف t ام S برابر b است. پس

$$۰\leq x_{t-۱}-y_{t-۱}=x_t-(y_t-۱)=x_t-y_t+۱<۱$$

پس $x_{t-۱}-y_{t-۱}=۰$. یعنی تعداد حروف a و b تا حرف $t-۱$ ام در S با هم برابرند. فرض کنید $S_۱$ کلمهٔ شامل حرف اول تا حرف $t-۱$ ام در S و $S_۲$ کلمهٔ شامل حرف t ام تا آخر S باشد، در این صورت $S=S_۱S_۲$ و در هر یک از $S_۱$ و $S_۲$ تعداد حروف a و b برابرند. طبق فرض استقرا کلمات $S_۱$ و $S_۲$ را می‌توانیم به‌دست آوریم و لذا پس از آن کلمهٔ S را نیز می‌توانیم به‌دست آوریم.

۱۰) فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و $a_۱a_۲\ldots a_n$ جایگشتی از اعداد مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ با ویژگی گفته شده باشد. در این صورت

$$(۲a_۱)(۲a_۲)\cdots(۲a_n)(۲a_۱-۱)(۲a_۲-۱)\cdots(۲a_n-۱)$$

جایگشتی از اعداد مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲n\}$ با ویژگی مورد نظر است. پس حکم به‌ازای $۲n$ نیز درست است. همچنین اگر حکم به‌ازای n درست باشد به وضوح به‌ازای $n-۱$ نیز درست است. با استفاده از این دو نکته نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای هر n درست است.

۱۱) حکم را به استقرا روی تعداد دخترهای کلاس ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای $k-۱$ درست باشد و کلاسی n نفره با k دختر در نظر بگیرید که هر پسر از این کلاس با حداقل یک دختر دوست باشد. یک دختر و تمام پسرهایی را که با این دختر دوست هستند از کلاس بیرون می‌آوریم. مجموعهٔ این افراد را A می‌نامیم. فرض کنید $a=|A|$. در کلاس $k-۱$ دختر باقی می‌ماند که هر پسر از کلاس با حداقل یکی از این دخترها دوست است. طبق فرض استقرا گروهی شامل حداقل $\frac{n-a}{۲}$ نفر از این کلاس می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که هر پسر از این گروه با تعداد فردی از دخترهای گروه دوست باشد. این گروه را B می‌نامیم. مجموعهٔ A را به دو دسته افراز می‌کنیم. $A_۱$ را مجموعهٔ پسرهایی از A می‌گیریم که با تعداد فردی از دخترهای B دوست باشند و $A_۲$ را مجموعهٔ بقیهٔ اعضای A می‌گیریم. در هر یک از گروه‌های $B\cup A_۱$ و $B\cup A_۲$ هر پسر با تعداد فردی دختر دوست است. چون یکی از $A_۱$ و $A_۲$ حداقل $\frac{a}{۲}$ عضو دارند، پس یکی از این دو گروه نیز حداقل $\frac{n}{۲}$ عضو دارند. پس حکم به‌ازای k نیز درست است.

۱۲) حکم به‌ازای $n=۴$ درست است.

$$\{۱,۸,۹\},\{۲,۱۰,۱۲\},\{۳,۴,۷\},\{۵,۶,۱۱\}$$

فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. پس مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳n\}$ را می‌توان به n دستهٔ ۳ تایی مانند $\{a_۱, b_۱, c_۱\}$، ... و $\{a_n, b_n, c_n\}$ افراز کرد به‌طوری‌که برای هر i، $c_i = a_i + b_i$. حال دسته‌های ۳ تایی زیر، مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۲n\}$ را به $۴n$ دسته افراز می‌کنند و در هر دسته یک عدد برابر مجموع دو دستهٔ دیگر است.

$$\{۲a_۱, ۲b_۱, ۲c_۱\}, \ldots, \{۲a_n, ۲b_n, ۲c_n\}, \{۱, ۹n, ۹n + ۱\},$$
$$\{۳, ۹n - ۱, ۹n + ۲\}, \{۵, ۹n - ۲, ۹n + ۳\}, \ldots, \{۶n - ۱, ۶n + ۱, ۱۲n\}$$

پس حکم به‌ازای $۴n$ نیز درست است و نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای بی‌نهایت n درست است.

۱۳) فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۲$ و $n - ۱$ درست باشد، در این صورت

$$a_n = ۳a_{n-۱} - ۲a_{n-۲} = ۳(۲^n - ۱) - ۲(۲^{n-۱} - ۱) = ۲^{n+۱} - ۱$$

پس حکم به‌ازای n نیز درست است.

۱۴) فرض کنید عدد طبیعی c به‌گونه‌ای باشد که $a_۱ = c + ۱$. همچنین فرض کنید $a_n = n + c$، در این صورت از فرض نتیجه می‌گیریم $a_{۲n+c} = ۲n + ۲c$. از

$$n + c = a_n < a_{n+۱} < \cdots < a_{۲n+c} = ۲n + ۲c$$

نتیجه می‌گیریم

$$a_{n+۱} = n + c + ۱, \quad a_{n+۲} = n + c + ۲, \quad \ldots \quad , \quad a_{۲n+c-۱} = ۲n + ۲c - ۱$$

پس علی‌الخصوص حکم به‌ازای $n + ۱$ درست است.

۱۵) فرض کنید a_n تعداد راه‌های فرش کردن صفحهٔ شطرنجی $۲n \times ۵$ با موزاییک‌های داده شده باشد. به سادگی می‌توانید احکام زیر را ثابت کنید.

$$a_۱ = ۲, \quad a_۲ = ۶, \quad a_۳ \geq ۲۰, \quad a_n \geq ۲a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} + ۴a_{n-۳}$$

پس حکم به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۳$، $n - ۲$ و $n - ۱$ درست باشد. در این صورت طبق رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم

$$a_n \geq ۲ \times ۲ \times ۳^{n-۲} + ۲ \times ۲ \times ۳^{n-۳} + ۴ \times ۲ \times ۳^{n-۴} = ۵۶ \times ۳^{n-۴} > ۲ \times ۳^{n-۱}$$

پس حکم به‌ازای n نیز درست است.

۱۶) فرض کنید به‌ازای n سنگریزه نفر دوم استراتژی برد داشته باشد، در این صورت به‌ازای $n + ۳$ سنگریزه نیز نفر دوم استراتژی برد دارد. زیرا اگر در ابتدا $n + ۳$ سنگریزه وجود داشته باشد، بعد از حرکت نفر اول، نفر دوم می‌تواند کاری کند که n سنگریزه باقی بماند. با توجه به این که به‌ازای ۳ سنگریزه نفر دوم استراتژی برد دارد، نتیجه می‌گیریم اگر n مضرب ۳ باشد نفر دوم استراتژی برد دارد. حال اگر n مضرب ۳ نباشد، نفر اول می‌تواند در حرکت اول طوری بازی کند که پس از حرکتش تعداد سنگریزه‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد و با توجه به حالت قبل نتیجه می‌گیریم نفر اول استراتژی برد دارد.

۱۷) حکم را به استقرای قوی روی $a + b$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۰، ۱، ...و $k - ۱$ درست باشد و اکنون $a + b = k$. می‌توان نوشت

$$a = ۲m + r, \quad b = ۲n + s$$

که r و s برابر ۰ یا ۱ هستند. چون $m + n \leq k - ۱$، لذا طبق فرض استقرا می‌توانیم مهره را به نقطهٔ (m, n) برسانیم. سپس با انجام یک حرکت مهره را روی نقطهٔ (a, b) قرار می‌دهیم. پس حکم به‌ازای k نیز درست است.

۱۸) فرض کنید A کلمه‌ای a حرفی و B کلمه‌ای b حرفی باشد. حکم را به استقرای قوی روی $a + b$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۲، ۳، ... و $k - ۱$ درست باشد و اکنون $a + b = k$. اگر $a = b$، از $AB = BA$ نتیجه می‌گیریم $A = B$ و در این حالت قرار می‌دهیم $C = A$. اگر $a > b$، آنگاه از $AB = BA$ نتیجه می‌گیریم که b

حرف ابتدایی کلمهٔ A همان کلمهٔ B است، پس کلمهٔ X وجود دارد که $A = BX$. پس $(BX)B = B(BX)$ و لذا $XB = BX$. چون $(a-b)+b \leq k-۱$، لذا طبق فرض استقرا کلمه‌ای مانند C وجود دارد که هر یک از X و B از قرار دادن چند کلمهٔ C در کنار یکدیگر به‌دست می‌آیند. از $A = BX$ نتیجه می‌گیریم که A نیز از قرار دادن چند C در کنار یکدیگر به‌دست می‌آید. پس حکم به‌ازای k نیز درست است.

۱۹) حکم را به استقرای قوی روی $m+n$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و $k-۱$ درست باشد و اکنون $m+n=k$ و در ضمن m فرد و n زوج باشد. چنان‌چه نفر اول یک سنگریزه از دستهٔ دوم بردارد هر دو دسته تعداد فردی سنگریزه خواهند داشت. حال نفر دوم از هر دسته‌ای که بخواهد سنگریزه بردارد باید تعداد فردی سنگریزه از آن بردارد، لذا بعد از حرکت نفر دوم یک دسته تعداد زوج و دستهٔ دیگر تعداد فردی سنگریزه دارد. طبق فرض استقرا نفر اول در ادامهٔ بازی می‌تواند طوری بازی کند که برندهٔ بازی شود. پس حکم به‌ازای k نیز درست است.

۲۰) فرض کنید

$$n = a_۱ + \cdots + a_k, \quad \frac{۱}{a_۱} + \cdots + \frac{۱}{a_k} = ۱$$

در این صورت

$$۲n + ۲ = ۲a_۱ + \cdots + ۲a_k + ۲, \qquad \frac{۱}{۲a_۱} + \cdots + \frac{۱}{۲a_k} + \frac{۱}{۲} = ۱,$$

$$۲n + ۹ = ۲a_۱ + \cdots + ۲a_k + ۳ + ۶, \quad \frac{۱}{۲a_۱} + \cdots + \frac{۱}{۲a_k} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۱$$

پس اگر n ویژه باشد، آنگاه $۲n+۲$ و $۲n+۹$ نیز ویژه‌اند و با توجه به این که حداقل یک عدد ویژه وجود دارد نتیجه می‌گیریم بی‌نهایت عدد ویژهٔ زوج و بی‌نهایت عدد ویژهٔ فرد وجود دارد.

۲۱) اگر چنین افرازی وجود داشته باشد، در این صورت مجموع $n + \cdots + ۲ + ۱$ باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد و لذا $n = ۸k$ یا $n = ۸k + ۷$. حال ثابت می‌کنیم که اگر $n = ۸k$ یا $n = ۸k + ۷$، آنگاه افراز مورد نظر وجود دارد. به‌ازای $n = ۷$ و $n = ۸$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند به‌طوری‌که مجموع اعضای هر یک با دیگری برابر باشد. در این صورت مجموعه‌های

$$A_۱ \cup \{n + ۱, n + ۸\}, \quad A_۲ \cup \{n + ۲, n + ۷\},$$

$$A_۳ \cup \{n + ۳, n + ۶\}, \quad A_۴ \cup \{n + ۴, n + ۵\}$$

افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n + ۸\}$ است که مجموع اعضای آن‌ها با هم برابر است. پس حکم به‌ازای $n + ۸$ نیز درست است.

کتاب‌نامه

[۱] علی‌رضا علی‌پور، ترکیبیات، مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، ۱۳۸۲.

[۲] دمیتری و. فومین، المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات اینشتین، ۱۳۷۴.

[۳] رالف پ. گریمالدی، ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی، ترجمهٔ محمدعلی رضوانی و بیژن شمس، مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، ۱۳۷۶.

[۴] ایوان نیون، ریاضیات انتخاب، ترجمهٔ علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

[۵] ن. ویلنکین، ریاضیات ترکیبی، ترجمهٔ شمس‌الدین صبوری، انتشارات گوتنبرگ، ۱۳۵۲.

[6] R. A. Bruldi, "Introductory Combinatorics," Prentice Hall, 1999.

[7] D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg, "Mathematical Circles (Russian Experience)," AMS, 1996.

[8] G. E. Martin, "Counting: The Art of Enumerative Combinatorics," Springer, 2001.

[9] K. H. Rosen, "Discrete Mathematics and its Applications," McGraw-Hill,1999.

[10] A. Tucker, "Applied Combinatorics," John Wily & Sons, 2002.